

## Risque de crédit

- Le mot "crédit" a la même étymologie que le mot "croire"
- en latin, "credo" = je crois, j'ai confiance
- « Donner crédit à quelque chose »
- c'est donc une activité qui repose sur la confiance que le prêteur accorde à l'emprunteur de qui il attend le remboursement du prêt.
- Le risque principal pour le prêteur est donc le non-remboursement de l'argent prêté (ou « confié »)
- Que le prêteur soit dans l'incapacité de rembourser et/ou qu'il souhaite se soustraire à son engagement initial

1

## Risque de crédit

- Une forme « primitive » d'aléa moral dans le cas du crédit est d'organiser son insolvabilité : cash-extraction
- L'augmentation du risque des actifs (asset-substitution, gamble for recovery) est une forme complémentaire



2

[http://www.wv.uni-magdeburg.de/bizecon/material/JensenMeckling\\_1976.pdf](http://www.wv.uni-magdeburg.de/bizecon/material/JensenMeckling_1976.pdf)

## Coûts d'agence de la dette : aléa moral

- « Aléa moral » ou "Moral hazard"
  - Deux parties, le « **principal** » et l'« **agent** »
  - Le principal propose un contrat à l'agent en vue de lui déléguer une action
  - Ici, les **actionnaires** choisissent les investissements pour le compte de l'ensemble des bailleurs de fonds, y compris les **créanciers**
  - Ce dernier peut accepter ou refuser le contrat proposé
- Asymétrie d'information sur le comportement de l'agent qui peut être modifié après la signature du contrat
  - Au détriment du principal
  - Sans que celui puisse contrôler le comportement de l'agent
  - Ou plus précisément, ce contrôle (monitoring) a priori ou a posteriori est coûteux.

3

## Coûts d'agence de la dette



- Aléa moral
  - Exemple d'un contrat d'assurance automobile
  - L'assureur ne contrôle pas la conduite de l'assuré
  - Une fois assuré, celui-ci peut modifier son comportement et prendre plus de risques
  - Protection du principal par le monitoring
    - GPS, disques enregistreurs
    - Surveillance plus étroite des actionnaires par les créanciers
    - Dans le cas des banques et des compagnies d'assurances
    - Autorité de Contrôle Prudentiel
  - Limitation de la protection : franchise
    - Protection du principal contre les premières pertes
    - Analogue à l'octroi de garanties personnelles par l'emprunteur ou par l'entreprise

4

## Coûts d'agence de la dette : aléa moral

- « Aléa moral »
  - Exemple d'un contrat d'assurance automobile
  - La protection du principal par le monitoring (ici GPS, disques enregistreurs)
  - Limitation de la protection : franchise
  - Idem suppression de la responsabilité limitée
    - Mais peut conduire à l'abandon de projets à valeur actuelle nette positive
- Ne pas confondre avec le mécanisme d'antisélection
  - Analyse dans le cas des prêts
    - Joue ex-ante
    - Impossibilité de dissocier les « bons risques » des « mauvais risques »
    - Taux de prêt trop élevés pour les « bons risques »
    - Sous-investissement (alors que la VAN en information parfaite serait positive)
    - Rationnement du crédit

5

## Coûts d'agence de l'endettement : exemple

- On va considérer la relation d'agence entre actionnaires et créanciers pour une entreprise proche de la faillite
  - Pour simplifier entreprise financée à 100% par endettement
  - $I = A_0 = 100$  fonds apportés par les bailleurs de fonds
    - Ici, uniquement les créanciers
  - $i = 10\%$ , taux nominal de la dette contractée
  - $r_f = 10\%$  taux de placement sans risque
    - normalement  $i > r_f$ , mais la dette a pu être contractée antérieurement
  - Les actionnaires ont le contrôle des actifs
- Considérons différents projets d'investissement
  - Placement sans risque de 100 au taux  $r_f = 10\%$
  - $A_1 = 110, D_1 = 110, E_1 = 0$
  - La VAN du projet est  $-A_0 + E[A_1]/(1 + r_f) = 0$

6

## Coûts d'agence de l'endettement : exemple

- Comparons différents projets d'investissement
  - Placement sans risque
    - $E_1 = 0$  les actionnaires ne récupèrent rien, mais ils n'ont rien investi (VAN actionnaires = 0)
    - $D_1 = 100 \times (1 + 10\%)$  les créanciers récupèrent la somme contractuellement due (VAN créanciers = 0)
  - Autre investissement possible
    - $A_1 = 121$  avec probabilité 1/2
    - $A_1 = 99$  avec probabilité 1/2
    - $\beta_A = 0$  pas de risque de marché, uniquement du risque idiosyncratique,  $E[\tilde{R}_A] = r_f = 10\%$
    - $E[A_1] = 110$  comme précédemment
    - La VAN du projet est  $-A_0 + E[A_1]/(1 + r_f) = 0$

7

## Coûts d'agence de l'endettement : exemple

- Comparaison projets investissements (suite)
  - Autre investissement possible
    - $A_1 = 121$  avec probabilité 1/2,  $A_1 = 99$  avec probabilité 1/2,  $\beta_A = 0$
    - $D_1 = 110$  si  $A_1 = 121$
    - $D_1 = 99$  si  $A_1 = 99$  (situation de défaut remboursement inférieur au remboursement contractuel)
    - On a supposé que les valeurs de l'actif  $A_1$  étaient déconnectées de celles du marché
    - De même pour la dette  $\beta_D = 0$
    - VAN dette  $-100 + 1/2 \left( \frac{110}{1+10\%} + \frac{99}{1+10\%} \right) = -5 < 0$
    - VAN actions  $-0 + 1/2 \left( \frac{11}{1+10\%} + \frac{0}{1+10\%} \right) = 5 > 0$

8

## Coûts d'agence de l'endettement : exemple

- Comparaison projets investissements (suite)
  - Autre investissement possible (suite)
  - La VAN globale reste inchangée (nulle)
  - Mais la VAN devient positive pour les actionnaires et négative pour les créanciers
  - Comme les actionnaires décident, il vont choisir le second projet de même VAN globale, mais plus risqué
  - Autre investissement possible encore plus risqué
    - $A_1 = 132$  avec probabilité  $1/2$ ,  $A_1 = 88$  avec probabilité  $1/2$ ,  $\beta_A = 0$ ,  $E[A_1] = 110$
    - $D_1 = 110$  si  $A_1 = 132$ ,  $D_1 = 88$  si  $A_1 = 88$
    - VAN dette  $-100 + 1/2 \left( \frac{110}{1+10\%} + \frac{88}{1+10\%} \right) = -10 < 0$

9

## Coûts d'agence de l'endettement : exemple

- Comparaison projets investissements (suite)
  - Autre investissement possible encore plus risqué (suite)
    - VAN dette  $-100 + 1/2 \left( \frac{110}{1+10\%} + \frac{88}{1+10\%} \right) = -10 < 0$
    - VAN actions  $-0 + 1/2 \left( \frac{22}{1+10\%} + \frac{0}{1+10\%} \right) = 10 > 0$
  - Les actionnaires augmentent encore leur VAN en augmentant le risque
    - Au détriment des créanciers
  - Ils ont intérêt à remplacer les actifs existants par des actifs plus risqués
    - Asset substitution
  - Les actionnaires disposent d'un ticket de loto gratuit et jouer au pari de la résurrection (gambling for recovery)

10

## Coûts d'agence de l'endettement : exemple

- Comparaison projets investissements (suite)
  - Les actionnaires ne créent pas de richesse pour l'entreprise, mais gagnent de l'argent au détriment des créanciers
  - Cela ne change pas à ce stade la valeur des actifs, mais leur répartition entre actionnaires et créanciers
  - Considérons maintenant le projet suivant
    - $A_1 = 121$  avec probabilité  $1/2$
    - $A_1 = 77$  avec probabilité  $1/2$
    - $E[A_1] = 99$
    - La VAN du projet est  $-A_0 + E[A_1]/(1+r_f) = -10$
    - VAN actionnaires  $-0 + 1/2 \left( \frac{11}{1+10\%} + \frac{0}{1+10\%} \right) = 5 > 0$
    - VAN créanciers =  $-15$

11

## Coûts d'agence de l'endettement : exemple

- Comparaison projets investissements (suite)
  - Dans l'exemple précédent, on a diminué la valeur de l'actif dans le cas défavorable (downside)
  - Dans le cas favorable, la valeur de l'actif reste égale à **121** comme dans le cas 2
  - Les actionnaires ne sont pas affectés par une augmentation du « downside »
    - Gravité du défaut
  - Il est de leur intérêt de s'engager dans le projet précédent à VAN négative pour l'entreprise, mais positive pour les actionnaires
  - Surinvestissement : investissement dans des projets à VAN négative pour l'entreprise (destruction de valeur)

12

## Coûts d'agence de la dette : aléa moral



- Intérêt des actionnaires à augmenter le niveau de risque au détriment des créanciers
  - « ticket de loto gratuit »
  - On parle ici bien du risque total
    - Y compris le risque idiosyncratique
  - Deux manières de créer de la valeur pour les actionnaires
    - Augmenter la valeur des actifs (A)
      - Choix d'investissement à valeur actuelle nette positive
    - Augmenter le niveau de risque total des actifs
      - Peut augmenter la richesse des actionnaires alors même que la valeur actuelle des flux A est négative
  - Conflit potentiel est maximal quand la valeur des actifs = valeur contractuelle de remboursement de la dette
    - Entreprise très endettée

13

## Exercice : augmentation de risque

- Investissement possible risqué
  - Financement par dette uniquement
    - $A_1 = 132$  avec probabilité  $1/2$ ,  $A_1 = 88$  avec probabilité  $1/2$ ,  $\beta_A = 0$ ,  $E[A_1] = 110$
    - $D_1 = 110$  si  $A_1 = 132$ ,  $D_1 = 88$  si  $A_1 = 88$
    - VAN dette  $-100 + 1/2 \left( \frac{110}{1+10\%} + \frac{88}{1+10\%} \right) = -10 < 0$
    - VAN actions  $-0 + 1/2 \left( \frac{22}{1+10\%} + \frac{0}{1+10\%} \right) = 10 > 0$
  - Considérons maintenant un investissement financé à 50% par dette et 50% par fonds propres ...
    - Reprendre les calculs. Que conclure ?

14

## Exercice : augmentation de risque

- Considérons maintenant un investissement financé à 50% par dette et 50% par fonds propres ...
  - Reprendre les calculs. Que conclure ?
    - $A_1 = 132$  avec probabilité  $1/2$ ,  $A_1 = 88$  avec probabilité  $1/2$ ,  $\beta_A = 0$ ,  $E[A_1] = 110$
    - $D_1 = 55$  si  $A_1 = 132$ ,  $D_1 = 55$  si  $A_1 = 88$
    - VAN dette  $-50 + 1/2 \left( \frac{55}{1+10\%} + \frac{55}{1+10\%} \right) = 0$
    - VAN actions  $-50 + 1/2 \left( \frac{132-55}{1+10\%} + \frac{88-55}{1+10\%} \right) = 0$
  - Le conflit d'intérêt disparaît si l'entreprise est mieux capitalisée

15

## Coûts d'agence de la dette : aléa moral



- Jensen et Meckling (1976) ont mis en évidence les différents coûts d'agence liés à la gestion des entreprises
  - Theory of the Firm: Managerial Behavior, Agency Costs and Ownership Structure
  - [http://www.wv.uni-magdeburg.de/bizecon/material/JensenMeckling\\_1976.pdf](http://www.wv.uni-magdeburg.de/bizecon/material/JensenMeckling_1976.pdf)
  - Parmi les coûts d'agence de l'endettement, on peut aussi mentionner *l'extraction de liquidités*
  - Les actionnaires peuvent faire remonter à leur niveau un des liquidités et vider l'entreprise de sa substance (ses actifs)
  - La plupart des régimes juridiques permettent d'annuler ces remontées de cash précédant la faillite
  - Raccourcir la maturité de la dette, prévenir les manipulations comptables (maturité de l'option) sont des aussi des protections des créanciers

16

## Coût d'agence de la dette : formalisation de l'augmentation de risque

- Une « augmentation de risque » de l'actif peut entraîner un transfert de richesse des créanciers vers les actionnaires.
- On pourrait penser utiliser la variance de l'actif (ou de sa rentabilité) pour mesurer le risque
- Mais une augmentation de la variance n'implique pas toujours ce transfert de risque
  - Sauf cas particuliers discutés ci-dessous
- Il est nécessaire de préciser ce que l'on entend par « augmentation de risque de l'actif »

17

## Aléa moral

- On suppose  $A_1$  log-normal. Les actionnaires peuvent choisir entre deux niveaux de risque  $\sigma_H$  et  $\sigma_B$ 
  - Le management des risques se résume ici à un choix de la volatilité des actifs.
  - Les actionnaires sont l'agent, les créanciers le principal.
  - L'aléa moral peut survenir quand les actionnaires peuvent choisir le niveau de risque  $\sigma_H, \sigma_B$  (action de l'agent) sans que les créanciers le sachent (asymétrie d'information).
- Loterie sur les marchés financiers ou couverture des risques
  - Les actionnaires peuvent ajouter une loterie (un pari sur les marchés financiers par exemple, qui est tel que  $E^Q(\varepsilon|A_1) = 0$  (n'augmente pas la valeur de l'actif) et  $A_1 \rightarrow A_1^* = A_1 + \varepsilon$
  - Remarque : si  $E^Q(\varepsilon|A_1) \neq 0$  il est possible que la richesse des créanciers augmente, une  $\varepsilon$  corrélation négative entre  $\varepsilon$  et  $A_1$  impliquant une couverture des risques

18

## Aléa moral, actions et prêts

- Conflit d'intérêt entre actionnaires et créanciers
  - Deux manières de créer de la valeur pour les actionnaires
  - Augmenter la valeur des actifs ( $A$ )
    - Choix d'investissement à valeur actuelle nette positive
    - Ceci revient à augmenter le niveau de l'« actif sous-jacent »
      - Actif sous-jacent aux actions et à la dette
    - La prime d'une option d'achat ↗ avec le prix de l'actif sous-jacent
      - Delta : dérivée de la prime de l'option par rapport au prix de l'actif sous-jacent
      - Le Delta d'une option d'achat est positif
  - Augmenter le niveau de risque
    - $A_1 \rightarrow A_1^* = A_1 + \varepsilon, E^Q(\varepsilon|A_1) = 0 : A_1 > A_1^*$  (Rothschild & Stiglitz)
    - Augmentation de la richesse des actionnaires sans augmentation de la valeur de l'actif
      - Vega : dérivée de la prime d'une option par rapport à la volatilité du prix de l'actif sous-jacent
      - Le Vega d'une option d'achat est positif

19

## Aléa moral, actions et prêts

- Conflit d'intérêt entre actionnaires et créanciers
  - Intérêt des actionnaires à augmenter le niveau de risque
    - $\varepsilon$  « ticket de loto gratuit »,  $E^Q[\varepsilon|A_1] = 0$
    - $A_1 \rightarrow A_1^* = A_1 + \varepsilon, A_1 >_{cv} A_1^*$ , asset substitution
  - Augmentation de risque au détriment des créanciers
    - Si la valeur de l'actif n'augmente pas, la valeur de la dette diminue quand la valeur des actions augmente
    - $A_0 = K_0 + D_0$
  - On parle ici bien du risque total de l'actif
    - Lié à la « volatilité » de la rentabilité de l'actif
    - Y compris le risque idiosyncratique (ou spécifique)
    - Et pas du risque de marché (qui fait intervenir le Beta des actifs)
  - Projet à VAN négative choisi par les actionnaires
    - Si l'effet lié au Vega de l'option domine celui lié au delta
  - Sur-investissement : choix de projet à VAN négative

20

## Augmentation de risque

- Gambling for recovery : le pari de la résurrection, jouer à quitte ou double



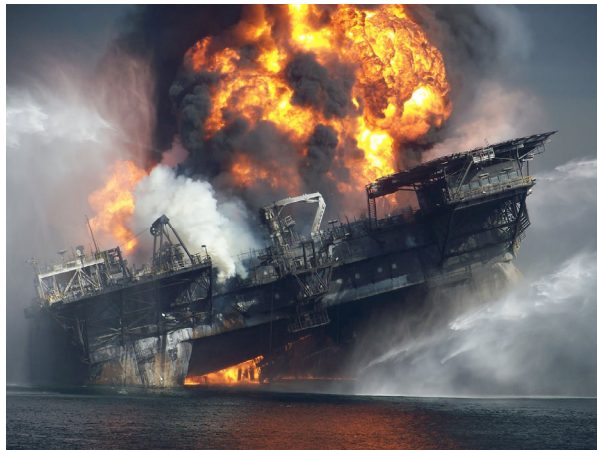
21

## Aléa moral, actions et prêts

- Conflit d'intérêt entre actionnaires et créanciers
  - L'aléa moral peut aussi entraîner un sous-investissement
  - Abandon de projets à VAN positive réduisant le risque
- Implications pour le risk management des entreprises
  - Demande d'assurance des risques industriels par les entreprises
  - Même si les primes demandées par les compagnies d'assurance ne sont pas « chargées »
    - Prime égale à l'espérance de la perte subie par l'entreprise
    - A supposer que l'on puisse calculer une telle espérance de perte, c'est-à-dire « calculer » le risque.
  - Réduction de risque détruit de la valeur pour les actionnaires
  - BP a renoncé à assurer ses plates-formes pétrolières pour économiser des primes annuelles de l'ordre du milliard de \$

22

Le coût pour BP (British Petroleum) lié à la pollution induite par l'incendie de la plate-forme Deepwater Horizon en 2010 a été d'environ 65 milliards de dollars (soit soixante-cinq années de primes).



<https://www.reuters.com/article/us-bp-deepwaterhorizon/bp-deepwater-horizon-costs-balloon-to-65-billion-idUSKBN1F50NL>

23

## Impact de la baisse de valeur des actifs sur les actions

- Le cours de l'action BP a baissé de 50% (baisse d'environ 100 milliards de dollars) avant de remonter
- Il faut prendre en compte les pertes comptables liés à la dépollution, les amendes (16 milliards de dollars), mais aussi la baisse de la valeur de la « franchise » (« reputational effect », très marqué aux Etats-Unis).
- On est cependant resté assez éloigné de la zone de faillite.

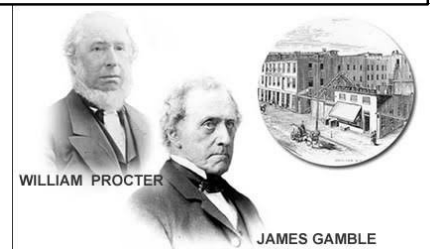


24

## Le cas Procter & Gamble vs Bankers Trust



On April 13, 1994, Procter & Gamble announced a one-time pretax charge of \$152 million against net income. The loss resulted from the early closing of two seemingly innocuous leveraged interest rate swaps, which Procter & Gamble had entered into with Bankers Trust as a way of reducing financing costs. For a company with over \$30 billion in sales which reported net income of \$2.2 billion in fiscal year 1994, this noncash charge was hardly life threatening.



WILLIAM PROCTER

JAMES GAMBLE

## Le cas Procter & Gamble vs Bankers Trust

- Payoff lié à l'écart entre taux 5 ans et taux 30 ans (« pente » de la « courbe des taux »)

In 1993, Bankers Trust (BT) agreed to lend money to Procter and Gamble (P&G) in return for a spread where the spread is described by equation (1). In other words, the spread represents the interest payment by P&G to BT.

$$\text{Spread} = \max \left( 0, \frac{98.5 * 5 \text{ yr USTyield}}{5.78\%} - 30 \text{ yr UST price} \right) / 100$$

Where **5 yr UST Yield** is the yield-to-maturity of a 5- year U.S. Treasury bond; **30 yr UST price** is the price of a 30-year U.S. Treasury bond.

The CEO of P&G said that the spread does **NOT** depend on **volatility of interest rates**. Do you agree? Justify your answer.



## Le cas Procter & Gamble vs Bankers Trust

LesEchos

Économie Politique Entreprises Finance - Marchés Bourse Monde Tech-Médias Start-up Régions Patrimoine

### Procter & Gamble accuse Bankers Trust d'escroquerie

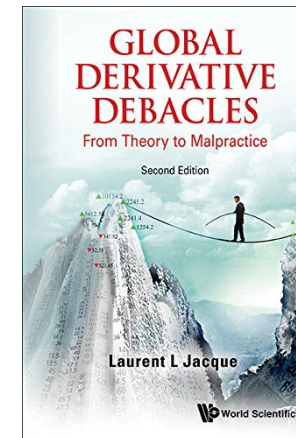
Procter & Gamble (P & G), le groupe américain de produits de grande consommation, a gagné un important point dans sa bataille judiciaire qui l'oppose, depuis 1994, à Bankers Trust sur la vente de produits dérivés.

Pour prouver qu'il s'agissait d'une stratégie d'ensemble visant à tromper la clientèle de la banque sur les risques qu'elle prenait, Procter & Gamble cite, dans des documents transmis à un tribunal fédéral américain, le nom de huit autres sociétés qui auraient été victimes de ces pratiques, comme les laboratoires pharmaceutiques suisses Sandoz. Au total, d'après P & G, les neuf entreprises auraient perdu 520,9 millions de dollars (2,6 milliards de francs environ) sur ces contrats.

Dans un jugement, le tribunal fédéral de Cincinnati (Ohio) a accepté, mardi, de retenir parmi les accusations portées contre la banque américaine celle d'escroquerie aux termes de la législation qui visait initialement à lutter contre la grande criminalité organisée. Selon cette loi (RICO), un tribunal peut accepter de tripler les 195 millions de dollars de dommages et intérêts réclamés. Mais de telles condamnations dans des affaires civiles ont été néanmoins extrêmement rares, du moins jusqu'à présent.

**The "Formula from Hell."** The spread formula which played havoc with Procter & Gamble interest costs is indeed a "brain-twisting" concoction and a testament to the creativity of Bankers Trust's "rocket scientists." It is defined as

$$\text{Spread} = \text{Max}\{0; [98.5 \times (5 \text{ year CMT yield})/5.58\% - 30 \text{ year Treasury Bond price}]/100\}$$



As early as October 27, 1994 and even before paying a single cent on the swap gone sour Procter & Gamble filed a lawsuit against Bankers Trust on grounds of “*racketeering, fraud, misrepresentation, breach of fiduciary duty,*<sup>136</sup> *negligent misrepresentation and negligence.*”<sup>137</sup>

more complex than previous ones had been. In its court filing against Bankers Trust, Procter & Gamble argued that<sup>138</sup>

*it entered into the 5/30 swap because in response to its repeated questions, Bankers Trust had falsely assured that it would be protected against significant losses from rising interest rates because it could safely lock in its rates if interest rates began to rise. When rates did rise, Bankers Trust changed the rules, imposing on Procter & Gamble a lock-in interest rate calculated under a secret, proprietary, complex, multi-variable pricing model that it would not share and to this day has not shared with Procter & Gamble.*

29

## Procter & Gamble vs Bankers Trust

**Settlement.** Most charges against Bankers Trust were dismissed by Judge Feikens who ruled that (a) the leveraged interest rate swap was not a security and (b) that Bankers Trust had no fiduciary responsibility. However Judge Feikens did find:

*the defendant had a duty to disclose material information to plaintiff both before the parties entered into the swap transactions and in their performance, and also a duty to deal fairly and in good faith during the performance of the swap transaction.... An implied contractual duty to disclose may arise where (1) a party has superior knowledge of certain information, (2) that information is not readily available to the other party and (3) the first party is acting on the basis of mistaken information.”<sup>142</sup>*

30

## Le cas Procter & Gamble vs Bankers Trust

- Smith (1997). Aggressive corporate finance: A close look at the Procter & Gamble-Bankers Trust leveraged swap. *Journal of Derivatives*.

### AGGRESSIVE CORPORATE FINANCE: A CLOSE LOOK AT THE PROCTER & GAMBLE-BANKERS TRUST LEVERAGED SWAP

Donald J. Smith  
*is associate professor of finance and economics at the School of Management of Boston University.*

*The leveraged interest rate swap transacted between Procter & Gamble and Bankers Trust in November 1993 is one of the infamous “derivatives debacles” of 1994. This article examines that transaction in detail, demonstrating that P&G in the swap was effectively writing embedded options on Treasury securities in order to lower its anticipated cost of borrowed funds.*

*While the premium and the payout on the options are expressed in a complex formula that set the terms of the swap, P&G’s market risk on the transaction*

*is not difficult to estimate — and was not difficult at the time. It appears that, for the risk it took on in writing the embedded options, P&G received only about one-third what it could have collected if the options were instead sold on Treasury futures contracts at the Chicago Board of Trade.*

*The author suggests that the difference between the anticipated accounting treatment on a leveraged swap and on traded options is a key factor in understanding why P&G entered the leveraged swap.*

31

**Lesson #2: Failure to Consider Worst-Case Scenarios.** More specifically, Procter & Gamble’s Board of Directors or its finance committee should have raised two related questions: “how much could Procter & Gamble lose from entering into a levered interest swap?” and “how much was Procter & Gamble likely to lose?” Neither question is necessarily easy to answer. The first question is typically addressed with the help of stress-testing and multiple scenario analysis while the second is gauged by the more sophisticated Value-at-Risk metric.

Stress-testing and multiple scenario analysis are simple methodologies for probing doomsday scenarios or “outlier” events. Stress-testing emphasizes one non-controllable variable which, by necessity, would have to be interest rates and we showed in [Table 1](#) that it was relatively easy to gauge the downside risk of entering in the leveraged interest rate swap proposed by Bankers Trust.

Multiple scenario analysis allows to schematize states of the world built on two or more key non-controllable variables. In this case the variables of choice were five-year yield on CMT and the price of 30-year treasuries. Their combination was tabulated in [Table 2](#) showing how the

32



## Procter & Gamble vs Bankers Trust

### Bibliography

- Chew, L. *Managing Derivative Risks: the Use and Abuse of Leverage* (John Wiley & Sons, 1996).
- Forster, D. M. The state of the law after Procter & Gamble v. Bankers Trust, *Derivatives Quarterly* (Winter, 1996).
- Marthinsen, J. *Risk Takers: Uses and Abuses of Financial Derivatives* (Pearson Addison-Wesley, 2005).
- Smith, D. J. Aggressive corporate finance: A close look at the Procter & Gamble — Bankers Trust Leveraged Swap, *The Journal of Derivatives* (Summer, 1997).
- Srivastava, S. Value-at-risk analysis of a leveraged swap, *The Journal of Risk*, 1(2).

33

## Aléa moral, actions et prêts

- **Conflit d'intérêt entre actionnaires et créanciers**
  - *Conflit potentiel important quand la valeur des actifs est égale à la valeur contractuelle de remboursement de la dette*
    - Seuil de faillite
  - *Niveau de l'actif sous-jacent égal au prix d'exercice*
    - Option « à la monnaie »
    - La valeur temps et le Vega sont élevés pour une option à la monnaie
    - Les actionnaires d'une entreprise en difficulté ont plus d'incitations à augmenter le niveau de risque des actifs
      - « Gambling for recovery », le pari de la résurrection
  - *Intérêt pour les créanciers de pouvoir intervenir avant que l'actif devienne inférieur à ce qui est dû aux déposants*
    - liquidation ordonnée, early resolution
    - La liquidation des actifs avant que ceux-ci ne deviennent inférieurs
    - FDIC, Dodd Frank Act aux Etats-Unis
    - Pouvoirs accrus donnés à l'ACPR, à la BCE et au SRB

34

Paul Volcker

[http://en.wikipedia.org/wiki/Paul\\_Volcker](http://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Volcker)

## Coûts d'agence de la dette



- **Protection des créanciers contre le risque de substitution d'actifs**
  - *Restriction sur les choix d'investissement*
    - « bond covenants » (clauses de sauvegarde ou de protection)
    - Réglementation financière, banques, compagnies d'assurances
    - Par exemple, projet de limiter les activités de trading pour compte propre des banques
      - La « règle Volcker » présuppose que ces activités sont plus risquées que les activités de banque commerciale
  - *Limiter les taux d'endettement*
    - Ratio de fonds propres minimal pour les banques augmentant avec les risques des crédits clients
    - Crédits subprimes, etc.
  - *Limitations de la clause de responsabilité limitée*
    - Sûreté personnelles, cautions
    - En cas de manquements aux bonds covenants, obligation des actionnaires à recapitaliser l'entreprise

35

Danièle Nouy, présidente du conseil de surveillance du  
Mécanisme de Supervision Unique

## Coûts d'agence de la dette



- **Protection des créanciers contre le risque de substitution d'actifs**
  - « monitoring » des risques
    - Contrôler les risques pris par les actionnaires
    - Exigences d'information financière
  - *Problème du passager clandestin*
    - Si beaucoup de « petits prêteurs », personne n'est incité à faire ce travail de surveillance
    - D'où l'idée de confier ce travail de surveillance à un « superviseur » (gendarme)
      - Action ex-ante à ne pas confondre avec l'action ex-post d'un administrateur judiciaire
  - *Liquidation ordonnée, « early resolution »*
    - Possibilité donnée au superviseur de liquider une banque solvable pour être certain du remboursement des dépôts à vue garantis
  - *Dans tous les cas, le monitoring est coûteux*

36

## Coûts d'agence de la dette

Jamie Dimon

[http://en.wikipedia.org/wiki/Jamie\\_Dimon](http://en.wikipedia.org/wiki/Jamie_Dimon)



- Éléments pouvant contribuer à limiter le prise de risque excessive des actionnaires des entreprises en difficulté
  - *Aversion vis-à-vis du risque des dirigeants*
  - *Si la politique de rémunération ne crée pas trop d'incitations à la prise de risque*
    - La valeur des stock-options augmente avec le risque
    - Pas le cas pour les paiements en actions
  - *L'existence d'actifs immatériels importants difficile à vendre sans rabais importants atténue le conflit d'intérêt entre actionnaires et créanciers*
    - En cas de disparition de la franchise, actionnaires et créanciers ont un intérêt commun à la continuation de l'activité et à la restructuration

37

## Coût d'agence de la dette

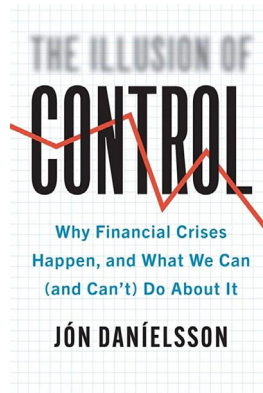
- En principe, les créanciers anticipent la possibilité d'une augmentation du risque des actifs, à leur détriment.
- Ce qui se manifeste par une hausse du coût du refinancement des entreprises
- Dans le cas des banques, augmentation du risque de course aux guichets (bank runs) et de crises de liquidité
- Notamment pour les dépôts des entreprises (wholesale funding) en principe non assurés (étude de cas Northern Rock)
- Hors dans le cas de SVB, la Fed et le FDIC ont décidé d'assurer tous les dépôts (bailout)
- Ce type d'action est amené à limiter l'effet de la discipline de marché

38

## Coût d'agence de la dette

- Danielsson remet au gout du jour la problématique traditionnelle
- En cas de crise, il est difficile pour une banque centrale de ne pas procéder à des bailouts
- L'analyse des interventions de la Fed au moment du Covid tend à montrer que l'octroi de liquidités en \$
  - *US dollar swap lines, FIMA repo facility pour les agents n'ayant pas un accès direct à la Fed*
- A diminué les craintes de baisse des prix des actifs (Greenspan put)
- Et diminué la discipline de marché
  - *Bevilacqua, Brandl-Cheng., Danielsson, Ergun, Uthemann & Zigrand (2021). The calming of short-term market fears and its long-term consequences: The central banks' dilemma.*

**Greenspan put –  
using monetary policy to  
prevent asset price deflation  
(i.e., reflate asset bubbles)**



39

## The calming of short-term market fears and its long-term consequences: The central banks' dilemma\*

Mattia Bevilacqua<sup>†</sup> Jon Danielsson<sup>†</sup> Lerby Ergun<sup>‡</sup>  
Andreas Uthemann<sup>‡</sup> Jean-Pierre Zigrand<sup>†</sup>

February 2022

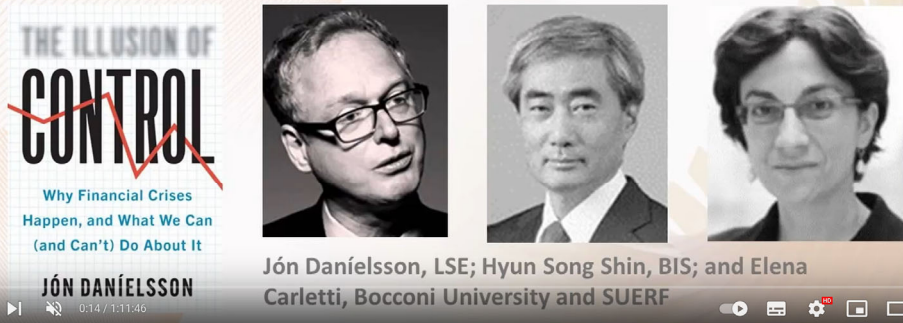
### Abstract

We study the short-term effects and long-term consequences of Fed crisis interventions on market fears — the risk perception of large asset price drops. We extract daily market fear term structures from option markets covering event horizons from two weeks up to 10 years ahead. We identify the discretionary component of crisis interventions, grouped into five policy categories, using announcement surprises during the market turmoil of spring 2020. The Fed's liquidity provision for financial intermediation, especially via its FX swap lines, had a strong impact on fear, while interest rate changes and credit support to the wider economy support were less effective. The strong effects on long-run risk perceptions point to the risk of moral hazard of discretionary crisis interventions.

40

SUERF and BAFFI Bocconi - Meet the Author webinar  
**The Illusion of Control: Why Financial Crises Happen,  
and What We Can (and Can't) Do About It**

Friday, 9 September 2022, 15:00-16:15 CET



<https://www.youtube.com/watch?v=xh62ATjA6mI>

41

## Aléa moral, actions et prêts

### ■ Contrôle continu du vendredi 2 mars

- *Cleveland contre Wall Street*
- *Questions sur le film et la crise des subprimes*
- *Exercice à partir de l'article de Myers (JFE 1977)*
  - VAN en « marchés complets »
  - Opportunité d'investissement, « growth options »
  - Sous-investissement
- *L'article en pdf est accessible via google scholar : <http://scholar.google.fr/>*



Journal of Financial Economics 5 (1977) 147–175.

### DETERMINANTS OF CORPORATE BORROWING\*

Stewart C. MYERS

Sloan School, M.I.T., Cambridge, MA 02139, U.S.A.

42

## Modèle structurel et augmentation du risque

45

## Modèle structurel et augmentation du risque

### ■ Rappel : modèle structurel et actifs contingents

#### A Re-Examination of the Modigliani-Miller Theorem

By JOSEPH E. SIGLITZ\*

#### I. The Basic Theorem

Consider a firm whose gross returns,  $X$  (before paying bondholders but after paying all non-capital factors of production) are uncertain. We can consider  $X$  as a function of the state of the world  $\theta$ . One dollar invested in a perfectly safe bond yields a gross return of  $r^*$ , so that  $r^* - 1$  is

the market rate of interest. If there is any chance of bankruptcy, the nominal rate  $r$  which the firm must pay on its bonds will depend on the number issued. If principal payments plus interest exceed gross profits,  $X$ , the firm goes bankrupt, and the gross profits are divided among the bondholders.<sup>4</sup> Thus the gross return on a dollar invested in the bonds of the firm depends on state  $\theta$

$$(1) \quad r(\theta) = \begin{cases} r & \text{if } rB \leq X(\theta) \\ \frac{X(\theta)}{B} & \text{if } rB \geq X(\theta). \end{cases}$$

Earnings per dollar invested in equity in state  $\theta$  are given by

$$(2) \quad e(\theta) = \begin{cases} [X(\theta) - rB]/E & \text{if } rB \leq X(\theta) \\ 0 & \text{if } rB \geq X(\theta) \end{cases}$$

where  $E$  is the value of the firm's equity. The value of the firm is

$$(3) \quad V = E + B.$$

46

## Modèle structurel et augmentation du risque

### GREAT MOMENTS IN FINANCIAL ECONOMICS: II. MODIGLIANI-MILLER THEOREM

Mark Rubinstein\*

Franco Modigliani and Merton Miller are almost universally credited with the theorem that bears their name. In fact, the theorem was stated and proven 20 years earlier by John Burr Williams, to which he gave the name: "the Law of the Conservation of Investment Value." However, Modigliani-Miller deserve credit for clearly laying out a formal arbitrage proof and popularizing the subsequent use of arbitrage arguments in financial economics. Even after their work (1958) and subsequent simplified proof (1969), there were still issues that needed to be clarified and led finally to a more modern proof of the theorem based on state-prices.

Rubinstein (2003). Great moments in financial economics: II. Modigliani-Miller Theorem. Journal of Investment Management.

47

## Modèle structurel et augmentation du risque

A second, more modern way to look at the Law is to see it as a special case of present value additivity: the present value of the sum of two potentially uncertain income streams equals the sum of their separate present values. Reading Williams' "proof" one can hardly fail to notice that, as applied to a firm's capitalization, this is exactly what he is saying.

This proof goes like this. Say a firm has two financial claims (possibly stock and bonds) against its assets,  $A$  and  $B$ , with future random payoffs  $A_s$  and  $B_s$ , across the exhaustive set of states  $s = 1, 2, \dots, n$  and the contractual arrangements of these claims are such that in every state of the world  $s$ , the sum of the payoffs to both of these claims exactly exhaust the operating income  $X_s$  of the firm in that state. That is,  $X_s = A_s + B_s$  for all states  $s$ . Let  $\pi_s$  be the economy-wide state price for state  $s$ . Then, the value of the firm:

$$V = \sum_s \pi_s A_s + \sum_s \pi_s B_s = \sum_s \pi_s (A_s + B_s) = \sum_s \pi_s X_s$$

48

## Modèle structurel et augmentation du risque

Now suppose the firm changes its capital structure in such a way that leaves its operating income unchanged state by state. In other words (assuming for simplicity that a third claim is not thereby created), in state  $s$ ,  $\Delta_s$  is now added to the payoff of asset  $A$  and correspondingly, to leave  $X_s$  unchanged,  $\Delta_s$  is subtracted from the payoff of asset  $B$ . Also assume, as Stiglitz suggests, that the change in capital structure does not create a new desired pattern of payoffs across states (or destroy an old desired pattern across states). In that case, since agents in the economy continue to face the same opportunity sets for desired investments, the state prices  $\pi_s$  will remain unchanged. Then the new value of the firm will be:

$$\sum_s \pi_s (A_s + \Delta_s) + \sum_s \pi_s (B_s - \Delta_s) = \sum_s \pi_s (A_s + B_s) = \sum_s \pi_s X_s = V$$

clearly unchanged from its previous value. Note that since the payoffs of the two claims are quite arbitrary, one could be risky debt and the other (limited liability) stock.

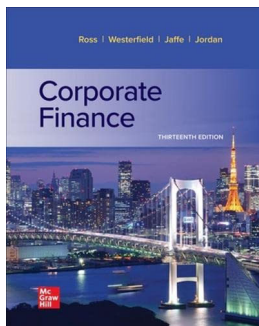
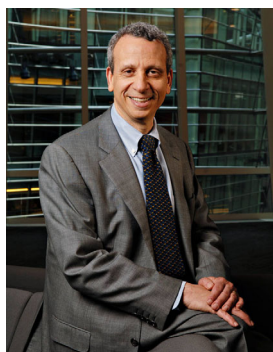
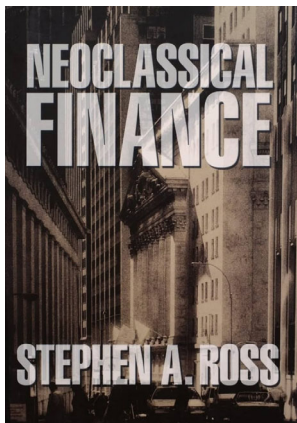
49

## Modèle structurel et augmentation du risque

A similar proof, under the assumption of "complete markets" (the economy has as many different securities as states of the world), so that the state prices  $\pi_s$  exist and are unique, first appeared in Hirshleifer (1966). As Hirshleifer points out, "the single-price law of markets" implies that a dollar received in the same state but from the payoffs of different securities must have the same state price to convert it into its present value (an assumption embodied in the above proof). Later, Rubinstein (1976) argues and Ross (1977) clearly proves that, even in the absence of complete markets, although state prices will not generally be unique, state prices will nonetheless exist if and only if there are no riskless arbitrage opportunities. This latter result is sometimes referred to as "the first fundamental theorem of financial economics." So the existence and application of the same state price to a dollar payoff received from different securities in the same state merely requires that there be no riskless arbitrage opportunities.

50

## Modèle structurel et augmentation du risque



51

## Modèle structurel et augmentation du risque

To capture uncertainty, we will assume that there is a state space,  $\Omega$ , and to keep the mathematics at a minimum, we will assume that there are only a finite number of possible states of nature:

$$\Omega = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}.$$

The state space,  $\Omega$ , lists the mutually exclusive states of the world that can occur,  $m$ . In other words, at time 1 the uncertainty is resolved and the world is in one and only one of the  $m$  states of nature in  $\Omega$ .

We will also assume that there are a finite number,  $n$ , of traded assets with a current price vector:

$$p = (p_1, \dots, p_n).$$

52

## Modèle structurel et augmentation du risque

We represent the Arrow-Debreu tableau of possible security payoffs by

$$G = [g_{ij}] = [\text{payoff of security } j \text{ if state } \theta_j \text{ occurs}].$$

The rows of  $G$  are states of nature and the columns are securities. Each row of the matrix,  $G$ , lists the payoffs of the  $n$  securities in that particular state of nature, and each column lists the payoffs of that particular security in the different states of nature.

53

## Modèle structurel et augmentation du risque

The Fundamental Theorem of Finance: The following three statements are equivalent:

1. No Arbitrage (NA).
2. The existence of a positive linear pricing rule that prices all assets.
3. The existence of a (finite) optimal demand for some agent who prefers more to less.

Proof: The reader is referred to Dybvig and Ross (1987) for a complete proof and for related

- Remarque : l'évaluation linéaire en l'absence de d'opportunités d'arbitrage (positive linear pricing rule) est équivalente à l'existence de prix positifs d'actifs contingents)
- Et est équivalente à la règle « néo-classique » de la VAN
- Nous n'avons considéré en cours que le cas des marchés complets

54

## Exercice : augmentation du risque

- $A_1$ , valeur (aléatoire) de l'actif à la date 1 vaut soit  $u$ , soit  $d$ .
  - Risque binaire
  - On suppose que :  $0 < d < u$
- On note  $D_0$  ( $D_0 > 0$ ), le montant apporté par les créanciers et  $i$  le taux nominal. Donner une condition sur l'endettement pour que l'entreprise puisse être en défaut.
  - $D_0 > \frac{d}{1+i}$
- Pour que l'entreprise puisse être solvable ?
  - $D_0 < \frac{u}{1+i}$
- On supposera par la suite que  $d < D_0(1+i) < u$ . On note  $r_f$  le taux sans risque. Montrer que  $i > r_f$ .

55

## Exercice : augmentation du risque

- Si  $i < r_f$ ,  $d < D_0(1+i) < D_0(1+r_f)$
- Le taux de rentabilité (aléatoire) de la dette est alors toujours inférieur au taux sans risque. On peut réaliser un arbitrage en vendant la dette d'entreprise et en plaçant au taux sans risque.
- En l'absence d'opportunité d'arbitrage,  $i > r_f$
- Prime de risque  $i - r_f > 0$
- On suppose les fonds propres investis positifs :  $E_0 > 0$ . En déduire des inégalités pour qu'il n'y ait pas d'opportunité d'arbitrage entre placements en actions et sans risque.
  - $0 < E_0(1+r_f) < u - D_0(1+i)$
  - La première inégalité peut se réécrire comme  $r_f > 100\%$  et est automatiquement vérifiée

56

## Exercice : augmentation du risque

- On note  $q$  la probabilité risque-neutre d'être dans l'état  $u$  et  $r_f$ , le taux sans risque. Valeur économique des fonds propres ?
  - $\frac{q}{1+r_f}(u - D_0(1+i))$ .  $q$  est aussi le prix
- On suppose que valeurs comptable et économique des fonds propres correspondent. En déduire la valeur de  $q$ 
  - $E_0 = \frac{q}{1+r_f}(u - D_0(1+i))$ , d'où  $q = \frac{E_0(1+r_f)}{u - D_0(1+i)}$
  - Vu que  $0 < E_0(1+r_f) < u - D_0(1+i)$ ,  $0 < q < 1$
- On suppose que valeurs comptable et économique de la dette correspondent. En déduire la valeur de  $q$ 
  - $D_0 = \frac{qD_0(1+i) + (1-q)d}{1+r_f}$ ,  $q = \frac{D_0(1+r_f) - d}{D_0(1+i) - d}$
  - Vu que  $d < D_0(1+r_f) < D_0(1+i)$ ,  $0 < q < 1$

57

## Exercice : augmentation du risque

- Valeurs économiques et comptables des fonds propres et des dettes coïncident. En déduire une autre relation et l'interpréter
  - $A_0 = E_0 + D_0 = \frac{q(u - D_0(1+i)) + qD_0(1+i) + (1-q)d}{1+r_f} = \frac{qu + (1-q)d}{1+r_f}$
  - Valeurs comptable (à gauche) et économique (à droite) de l'actif coïncident.
- Montrer que  $d < A_0(1+r_f) < u$ 
  - Comme  $0 < q < 1$ , et  $d < u$ ,  $A_0(1+r_f) = qu + (1-q)d \in ]d, u[$
  - Cela confirme qu'il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage entre l'actif risqué et l'actif sans risque (puisque'il n'y en pas au niveau des actions et des dettes qui constituent l'actif).
- On suppose  $A_0 = 1$ ,  $r_f = 0$  et  $q$  donné. Comment peut-on faire varier  $u$  et  $d$  sans faire varier la valeur de l'actif ?
  - On considère des couples  $(u, d)$ ,  $0 < d < u$  avec  $qu + (1-q)d = 1$

58

## Exercice (suite)

- On va maintenant introduire une possible seconde source de risque
- Et considérer des produits financiers associés à cette source de risque
- Produits pouvant être associés à des fins de couverture du risque de l'actif existant et/ou de spéculation (pari).
- On note  $\{1,2\}$  les deux états futurs possibles associés à la nouvelle source de risque.
- On est ainsi amené à considérer l'espace produit  $\{u, d\} \times \{1,2\}$ , soit quatre états  $(u, 1)$ ,  $(u, 2)$ ,  $(d, 1)$ ,  $(d, 2)$
- On suppose qu'il existe un marché des actifs contingents aux états  $\{1,2\}$
- $\pi_1$  : prix de l'actif contingent à l'état 1

59

## Exercice (suite)

- Acheter l'actif sans risque et vendre le produit contingent à l'état 1 permet de synthétiser l'actif contingent à l'état 2
- D'où  $\frac{1}{1+r_f} - \pi_1 = \pi_2$ .  $\pi_2$  : prix de l'actif contingent à l'état 2
  - Par la suite, pour simplifier les écritures, on supposera  $r_f = 0$
- Trois actifs **linéairement indépendants**
  - Actif contingent à l'état  $u$  : paye 1 si  $(u, 1)$  ou  $(u, 2)$  se réalise et zéro sinon
  - Actif contingent à l'état 1 : paye 1 si  $(u, 1)$  ou  $(d, 1)$  se réalise et zéro sinon
  - Actif sans risque : paye 1 dans les quatre états possibles :  $(u, 1)$ ,  $(u, 2)$ ,  $(d, 1)$ ,  $(d, 2)$
- Quatre états, trois actifs : marché incomplet

60

### Exercice (suite)

- On suppose que le risque supplémentaire qui est introduit est indépendant (sous  $Q$ ) du risque associé à l'actif
- Ceci se traduit par  $Q(\{(u, 1)\}) = q \times \pi_1$ 
  - On vérifie que cela implique
  - $Q(\{(u, 2)\}) = q \times \pi_2$
  - $Q(\{(d, 1)\}) = (1 - q) \times \pi_1$
  - $Q(\{(d, 2)\}) = (1 - q) \times \pi_2$
  - Probabilités jointes = produit des probabilités marginales
- Avec l'hypothèse précédente, les probabilités des quatre états élémentaires sont bien définies

61

### Exercice (suite)

- Passage de l'actif contingent à l'état 1 à un contrat forward (ou swap)

- (1) : Actif sans risque  $1 \begin{cases} 1 & (1) \\ 1 & (2) \end{cases}$

- (2) : actif contingent à 1  $\pi_1 \begin{cases} 1 & (1) \\ 0 & (2) \end{cases}$

- $(2) - \pi_1 \times (1)$   $0 \begin{cases} 1 - \pi_1 & (1) \\ -\pi_1 & (2) \end{cases}$

62

### Exercice (suite)

- Normalisation du contrat forward

- $(2) - \pi_1 \times (1)$   $0 \begin{cases} 1 - \pi_1 & (1) \\ -\pi_1 & (2) \end{cases}$

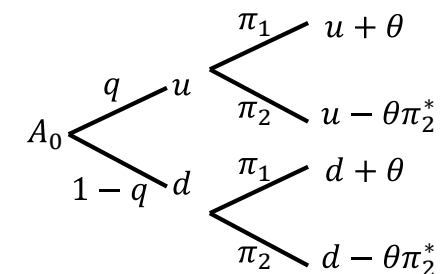
- $\frac{1}{1 - \pi_1} \times ((2) - \pi_1 \times (1))$   $0 \begin{cases} 1 & (1) \\ -\frac{\pi_1}{1 - \pi_1} = -\frac{\pi_1}{\pi_2} & (2) \end{cases}$

- On note  $\pi_2^* = \frac{\pi_1}{\pi_2}$

63

### Exercice (suite)

- Représentation des risques sous la forme d'un arbre



64



## Exercice (suite)

- On note  $V_1$  le (payoff dû) produit dérivé (de type swap) qui paye 1 dans l'état 1 et  $-\pi_2^*$  dans l'état 2
- Si l'entreprise achète  $\theta \in \mathbb{R}$  unités du swap précédent l'actif de l'entreprise devient  $A_1 + \theta V_1$
- Remarques :
  - $E^Q[V_1] = 0$  : valeur du contrat forward = 0
  - Le contrat forward permet de transférer de la richesse entre l'état 1 et l'état 2
- Propriétés (asset substitution)
  - $(E^Q[V_1|A_1] = 0)$
  - $\forall \theta \in \mathbb{R}, E^Q[\max(A_1 + \theta V_1 - D_0(1+i); 0)] \geq E^Q[\max(A_1 - D_0(1+i); 0)]$
  - $\forall \theta \in \mathbb{R}, E^Q[\min(A_1 + \theta V_1; D_0(1+i))] \leq E^Q[\min(A_1; D_0(1+i))]$

65

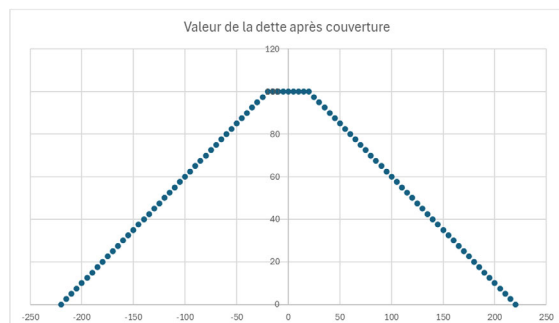
## Exercice (suite)

- Exemple numérique :  $u = 130, d = 90, D_0(1+i) = 110, q = 1/2, \pi_1 = 1/2$
- $E^Q[\min(A_1 + \theta V_1; D_0(1+i))] = \frac{1}{4} \times (\min(130 + \theta; 110) + \min(130 - \theta; 110) + \min(90 + \theta; 110) + \min(90 - \theta; 110))$ 
  - $\min(130 + \theta; 110) = 110 + \min(20 + \theta; 0)$
  - En poursuivant ces simplifications,
- $\frac{1}{4} \times (\min(130 + \theta; 110) + \min(130 - \theta; 110) + \min(90 + \theta; 110) + \min(90 - \theta; 110))$ 
  - Pour  $\theta = 0$  (pas de « couverture), valeur de la dette =  $100 (\frac{1}{2} \times 110 + \frac{1}{2} \times 90)$ .
  - Pour  $\theta = \pm 20$ , valeur de la dette =  $100 (\frac{3}{4} \times 110 + \frac{1}{4} \times 90)$ . Risque de défaut moins fréquent, mais gravité du défaut, plus importante.

66

## Exercice (suite)

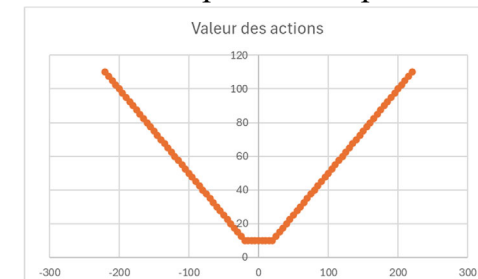
- En abscisse le nombre de contrats achetés ou vendus.
- La valeur de la dette est constante et égale à 90 quand la position est (en valeur nominale) inférieure à 20.
- La valeur de la dette diminue avec le montant de la position
- Elle devient nulle quand le montant de la position est  $\geq 220$



67

## Exercice (suite) : conflit d'agence entre actionnaires et créanciers

- Comme la valeur de la position en produits dérivés est nulle, la valeur des actions + celle de la dette reste égale à la valeur de l'actif, soit  $110 = \frac{1}{2} \times (130 + 90)$
- Valeur des actions vs exposition en produits dérivés.



- Les actionnaires ont intérêt à augmenter le niveau de risque, jusqu'à potentiellement « exproprier » les créanciers

68

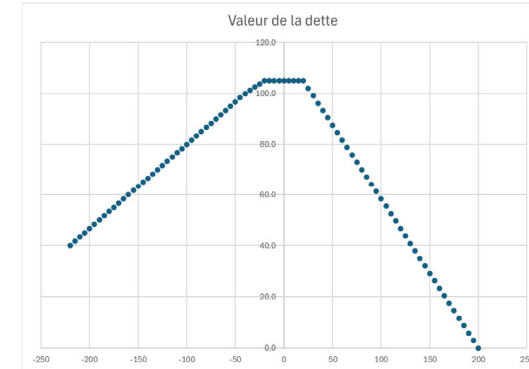
## Exercice (suite) – à vérifier

- Exemple numérique :  $u = 130, d = 90, D_0(1 + i) = 110, q, \pi_1$  non fixés
- $E^Q[\min(A_1 + \theta V_1; D_0(1 + i))] = q\pi_1 \min(130 + \theta; 110) + q\pi_2 \min(130 - \theta; 110) + (1 - q)\pi_1 \min(90 + \theta; 110) + (1 - q)\pi_2 \min(90 - \theta \pi_1/\pi_2; 110)$
- La fonction précédente est affine par morceaux.
  - Si  $-20\min(\pi_2/\pi_1; 1) \leq \theta \leq 20$ , valeur constante  $q\pi_1 110 + q\pi_2 110 + (1 - q)\pi_1 90 + (1 - q)\pi_2 90 = q110 + (1 - q)90$
  - Si  $\theta \geq 20$ ,  $q\pi_1 110 + q\pi_2(130 - \theta) + (1 - q)\pi_1 110 + (1 - q)\pi_2(90 - \theta \pi_1/\pi_2) = -(q\pi_2 + (1 - q)\pi_1)(\theta - 20) + q110 + (1 - q)90$
  - Si  $\pi_2/\pi_1 \geq 1$  et  $-20 \pi_2/\pi_1 \leq \theta \leq -20$ , la pente est égale à  $q\pi_1$
  - Si  $\pi_2/\pi_1 \geq 1$  et  $\theta \leq -20 \pi_2/\pi_1$ , la pente est égale à  $\pi_1$

69

## Exercice (suite) – à vérifier

- Exemple :  $u = 130, d = 90, D_0(1 + i) = 110, q = 3/4, \pi_1 = 1/3, \pi_2/\pi_1 = 2$
- $\frac{1}{4} \min(130 + \theta; 110) + \frac{1}{2} \min(130 - \theta; 110) + \frac{1}{12} \min(90 + \theta; 110) + \frac{1}{6} \min(90 - \theta/2; 110)$



70

## Exercice (suite)

- $\forall \theta \in \mathbb{R}, E^Q[\min(A_1 + \theta V_1; D_0(1 + i))] \leq E^Q[\max(A_1; D_0(1 + i))]$
- On considère  $E^Q[\min(A_1 + \theta V_1; D_0(1 + i))]$  et on commence par considérer l'espérance à  $A_1$  fixé
  - (Rappel) : théorème de l'espérance itérée
  - Soit  $f$  fonction de  $A_1$  et  $V_1$ ,  $E^Q[f(A_1, V_1)|A_1]$  est défini comme  $\varphi(A_1) = \pi_1 f(A_1, 1) + \pi_2 f(A_1, -\pi_2^*)$
  - Par ailleurs,  $E^Q[\varphi(A_1)] = q\varphi(u) + (1 - q)\varphi(d)$
  - $E^Q[f(A_1, V_1)] = E^Q[E^Q[f(A_1, V_1)|A_1]]$
  - Preuve :  $E^Q[f(A_1, V_1)] = q\pi_1 f(u, 1) + q\pi_2 f(u, -\pi_2^*) + (1 - q)\pi_1 f(d, 1) + (1 - q)\pi_2 f(d, -\pi_2^*)$
  - $E^Q[f(A_1, V_1)] = q\varphi(u) + (1 - q)\varphi(d) = E^Q[\varphi(A_1)] = E^Q[E^Q[f(A_1, V_1)|A_1]]$

71

## Exercice (suite)

- On considère  $f(A_1, V_1) = \min(A_1 + \theta V_1; D_0(1 + i))$
- Vu le transparent précédent,  $E^Q[\min(A_1 + \theta V_1; D_0(1 + i))] = E^Q[\pi_1 \min(A_1 + \theta; D_0(1 + i)) + \pi_2 \min(A_1 - \theta \pi_2^*; D_0(1 + i))]$ 
  - On « fixe »  $A_1$  et on calcule d'abord l'espérance par rapport à  $V_1$
  - $x \rightarrow \min(x, D_0(1 + i))$  est concave et comme  $\pi_2 = 1 - \pi_1 \in [0, 1]$
  - $\pi_1 \min(A_1 + \theta; D_0(1 + i)) + \pi_2 \min(A_1 - \theta \pi_2^*; D_0(1 + i)) \leq \min(\pi_1(A_1 + \theta) + \pi_2(A_1 - \theta \pi_2^*); D_0(1 + i))$
  - Or, comme  $\pi_2^* = \frac{\pi_1}{\pi_2}$ ,  $\pi_1 \theta + \pi_2(-\theta \pi_2^*) = \pi_1 \theta + \pi_2(-\theta \pi_1/\pi_2) = 0$  et  $\pi_1 A_1 + \pi_2 A_1 = A_1$
  - $\min(\pi_1(A_1 + \theta) + \pi_2(A_1 - \theta \pi_2^*); D_0(1 + i)) = \min(A_1; D_0(1 + i))$
  - $\pi_1 \min(A_1 + \theta; D_0(1 + i)) + \pi_2 \min(A_1 - \theta \pi_2^*; D_0(1 + i)) \leq \min(A_1; D_0(1 + i))$
  - D'où  $E^Q[\min(A_1 + \theta V_1; D_0(1 + i))] \leq E^Q[\min(A_1; D_0(1 + i))]$

72

## Exercice (suite)

- Le théorème de l'espérance itérée prend différentes formes
- L'espérance d'une variable aléatoire (v.a.) est l'espérance de l'espérance conditionnelle de cette v.a.
  - Sachant la valeur prise par une autre v.a.
  - Quel événement se réalise parmi une partition de l'espace d'état;

### Théorème 15 (Formule de l'espérance totale)

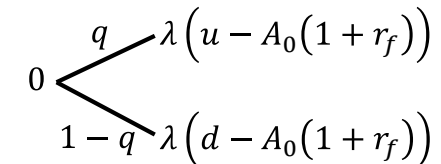
Soit  $(A_i)_{i \in I}$  (avec  $I \subset \mathbb{N}$ ) un système complet d'événements.  
 Soit  $J$  l'ensemble des entiers  $i$  tels que  $P(A_i) \neq 0$ .  
 $X$  admet une espérance si et seulement si la série double des  $(kP_{A_i}(X = k)P(A_i))_{(k,i) \in X(\Omega) \times J}$  converge absolument.  
 Dans ce cas, pour tout  $i \in J$ ,  $X$  admet une espérance sachant  $A_i$  et on a :

$$E(X) = \sum_{i \in J} P(A_i) E(X|A_i) \quad (\text{somme finie ou somme d'une série convergente}).$$

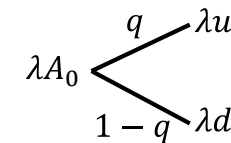
73

## Exercice (suite)

- Couverture par Credit Default Swap (off-balance sheet)
  - Payoff pour le vendeur de protection
  - $0 < \lambda < 1$



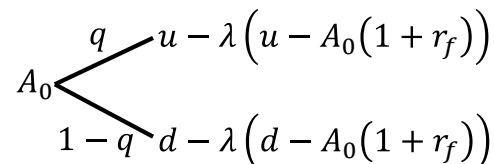
- Ou titrisation (on-balance sheet) avec réinvestissement des actifs cédés en actif sans risque



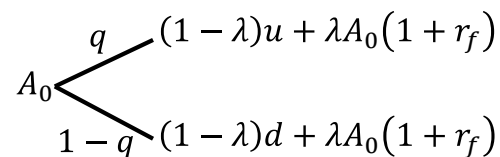
74

## Exercice (suite)

- Évolution des valeurs de l'actif après l'opération de couverture du risque
- Actif + payoff de l'acheteur de protection



- Détention de  $\lambda \in ]0,1[$  unités d'actif et  $1 - \lambda$  unités d'actif sans risque



75

## Exercice (suite)

- Propriété : On note  $A_1^* = \lambda A_1 + (1 - \lambda)A_0(1 + r_f)$ ,  $\lambda \in ]0,1[$ . Alors,  $E[\min(A_1^*; D_0(1 + i))]$  est décroissant en  $\lambda$ 
  - La valeur de la dette diminue avec l'ampleur de la titrisation
  - Il en résulte que  $E[(A_1^* - D_0(1 + i))^+]$  augmente avec  $\lambda$
  - La couverture du risque à l'actif entraîne un transfert de richesse au profit des actionnaires
- Exemple numérique :  $u = 130, d = 90, D_0(1 + i) = 110, r_f = 0, q = 1/2$ .
  - $A_0 = qu + (1 - q)d = 110$
  - Avec  $\lambda = 0$  :  $\lambda u + (1 - \lambda)A_0 = 130, \lambda d + (1 - \lambda)A_0 = 90$ , valeur de la dette :  $q \times (130 - 110) + (1 - q)0 = 10$
  - Avec  $\lambda = 1/2$  :  $\lambda u + (1 - \lambda)A_0 = 120, \lambda d + (1 - \lambda)A_0 = 100$ , valeur de la dette :  $q \times (120 - 110) + (1 - q)0 = 5$

76

## Brève étude de cas



- Le 24 mars 1989, le pétrolier Exxon Valdez s'échoue sur la côte Sud de l'Alaska. C'est une marée noire sans précédent : 7 000 km de marée noire, 40 000 tonnes de pétrole brut déversé dans l'océan, 800 km de côtes recouvertes

### Exxon Valdez Award Cut to \$507.5 Million by Top Court

By Greg Stohr  
26 juin 2008 at 00:06 UTC+2



This article is for subscribers only.

A divided U.S. Supreme Court cut the \$2.5 billion punitive damage award against Exxon Mobil Corp. for the 1989 Valdez disaster to \$507.5 million, ending a 19-year legal saga over the worst oil spill in U.S. history.

77

## Brève étude de cas



## J.P.Morgan

- Pour payer les dommages en prévision de sa condamnation, Exxon avait demandé une facilité de caisse de 5 milliards à JP Morgan.



78

« Exxon était client de la banque et nous avons une exposition associée à cette relation avec une lettre de crédit émise par nos soins. Une lettre de crédit crée un risque d'impayé. Dans le cas où Exxon ne respectait pas son obligation, c'était à la JP Morgan d'intervenir et de remplir cette obligation de paiement à leur place. Il s'agissait d'un montant colossal et il y avait un risque significatif qui y était associé.

L'idée était que nous voulions acheter une protection chez d'autres. Dans ce cas précis, nous avons payé une commission à la BERD en échange de leur engagement sur ce risque crédit.

C'est tout. C'était un concept très simple.

Pourquoi on l'a fait ? Nous avons voulu libérer notre capacité à faire plus de business avec Exxon.

## Brève étude de cas



79

## Brève étude de cas

- On retrouve l'idée qu'une entreprise en bonne santé financière n'a pas forcément intérêt à prendre des risques inconsidérés
- ... Pour protéger sa franchise
- Les produits dérivés sont un moyen simple de transférer des risques
- Ici du risque de défaut, via un CDS sur Exxon
  - Credit Default Swap : produit de hors-bilan, pas d'échange initial de liquidités (hors initial margin).
- En termes de tarification et de gestion des risques, la banque, ici JP Morgan a « juste » besoin de trouver une contrepartie, qui va vendre la protection (pour clore la position ouverte)
- À un tarif (spread) suffisamment bas, pour qu'elle dégagne une marge (positive).

80

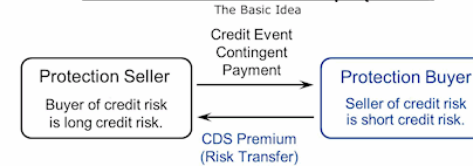
## Brève étude de cas

Pourquoi la BERD l'a fait ? Parce qu'ils savaient qu'Exxon était une compagnie solide dont ils comprenaient le modèle. Il me semble qu'ils étaient notés AAA à l'époque. Et ils recevraient de la JP Morgan une compensation pour prendre ou assumer le risque sur Exxon. Ils pensaient que c'était un risque valable et une proposition gagnante. Ils ont donc pris un risque modeste, et n'ont pas créé une concentration de risques importants, donc leur risque était essentiellement dispersé. (...) Ce n'était pas un acte de persuasion de la JP Morgan. Nous leur avons simplement procuré les moyens pour arriver à leurs fins, sachant que ce sont eux qui ont défini leurs fins. Et leurs buts consistaient à avoir des objectifs d'investissements, et on les a fournis pour eux.

- Le concept était attractif, car dans le cas d'Exxon, noté à l'époque AAA, la probabilité de défaut à un horizon d'un an était « négligeable »
- De l'ordre de 1/150 000. En théorie de la décision, une probabilité est dite négligeable, si elle est négligée

81

## Credit Default Swap (CDS)



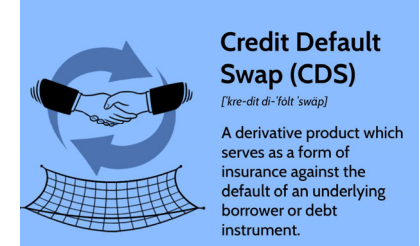
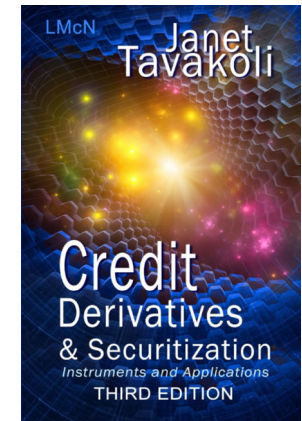
The Protection Seller receives a periodic premium from the Protection Buyer in exchange for a contingent payment if there is a pre-defined Credit Event of a pre-specified Reference Entity.

The contingent payment is determined based on pre-specified settlement terms.

Source: Credit Derivatives & Synthetic Structures 2<sup>nd</sup> Edition, John Wiley & Sons, by Janet Tavakoli  
©Tavakoli Structured Finance, Inc.

« Les crédits dérivés sont maintenant diabolisés. Ils sont vus comme les jouets favoris de Satan »

Timothy O'Brien The New York Times



82

## Brève étude de cas

- Exemple : Credit Default Swaps sur Citi(group) pour différentes maturités, fin novembre 2008
  - 255 bps pour cinq ans de maturité (soit 19,3% de probabilité implicite/risque-neutre de défaut)

Deal Information	Spreads
Reference: Citigroup Inc	Curve Date: 11/28/08
Counterparty: Citigroup Inc	Benchmark: S 23 Mid
Ticker: / Series: / Privilege: User	US BGN Swap Curve
Business Days: US GB	Spreads: Contributor WASK
Business Day Adj: Following	101214 USD Senior IMMI
BUY Notional: 10.00 MM	Par Cds Spreads Default
Effective Date: 11/29/08	Flat: N (bps) Prob
Maturity Date: 12/20/13	6/22/09 328.200 0.0306
Payment Freq: Quarterly	2/21/09 328.200 0.0569
Pay Accrued: True	2/20/10 307.399 0.1008
Curve Recovery: True	2/20/11 282.500 0.1344
Recovery Rate: 0.40	2/20/12 262.399 0.1620
Deal Spread: 255.500 bps	2/20/13 255.500 0.1927
	2/21/15 251.699 0.2552
	2/20/18 245.199 0.3345
	Frequency: Quarterly
	Day Count: ACT/360
	Recovery Rate: 0.40

83

## Gestion des risques et intérêt des actionnaires et des créanciers

- Les résultats précédents, dans le cadre d'un modèle statique ont un aspect décevant pour les promoteurs de la gestion des risques
  - Les actionnaires décident de la gestion financière
  - Ils sont incités à prendre des paris sans rapport avec leur activité
  - Ils ne sont pas incités à une gestion prudente, visant à limiter leurs risques en les externalisant
- Pour avoir une meilleure appréhension du compromis à trouver, il faut introduire une motivation à diminuer les risques
  - Ne pas perdre la valeur des actifs intangibles

84

## Gestion des risques et intérêt des actionnaires et des créanciers

- On va supposer que l'on peut diviser les actifs en deux :
  - Les actifs tangibles inscrits au bilan à leur valeur de marché
  - Les actifs intangibles n'apparaissent pas dans le bilan et voient leur valeur réduite à zéro en cas de détresse financière et de liquidation (sunk cost).
  - On distingue entre liquidation ordonnée (orderly resolution protection de la valeur des actifs intangibles – AIG) et non-ordonnée (activités européennes de Lehman Brothers)
  - Il y a « faillite » si les actifs tangibles sont inférieurs au montant dû aux créanciers.
- La présence d'actifs intangibles peut amener à modifier les incitations des actionnaires
  - Diminuer le risque permet de protéger la valeur des actifs intangibles.

85

## Gestion des risques et intérêt des actionnaires et des créanciers

- Exemple numérique (suite) : impact de la perte possible des actifs intangibles en cas de liquidation
  - $r_f = 0, q = 1/2, D_0(1+i) = 55$
  - $u = u_t + u_i = 70 + 60 = 130$
  - $d = d_t + d_i = 50 + 40 = 90$
- Valeur des actions sans couverture du risque des actifs
  - $1/2 \times (130 - 55) + 1/2 \times (50 - 55)^+ = 37,5$
- Valeur des actifs après couverture du risque des actifs
  - $u = u_t + u_i = 60 + 60 = 130$  ( $u_t$  passe de 70 à 60)
  - $d = d_t + d_i = 60 + 40 = 90$  ( $d_t$  passe de 50 à 60)
- Valeur des actions avec couverture du risque des actifs
  - $1/2 \times (120 - 55) + 1/2 \times (100 - 55) = 60$
- La valeur des actions augmente si couverture du risque

86

## Gestion des risques et intérêt des actionnaires et des créanciers

- On établit une typologie des opérations de transfert de risque
- Mutuellement bénéfique pour les actionnaires et les créanciers si réduction du risque des actifs tangibles permettant d'éviter les situations de détresse financière et de protéger la valeur des actifs intangibles
- Au bénéfice des actionnaires et au détriment des créanciers, si augmentation du risque, par exemple avec des produits dérivés, en connexion ou pas avec l'activité et si la valeur des actifs intangibles est nulle ou faible (a fortiori si elle est négative)
- D'où l'attention à porter par les créanciers aux entreprises dont le P/B est  $< 1$  : doctrine standard de la supervision financière (attention au gamble for recovery et à la profitabilité)

87

88

## Formalisation de l'augmentation du risque : comparaison entre variables aléatoires

89

## Rappels succincts de probabilité

- Variables aléatoires associées à une loi de probabilité avec densité (rappel succinct)
  - Variable aléatoire réelle  $X$
  - $x \in \mathbb{R} \rightarrow F(x) = P(X \leq x) = P(X \in ]-\infty, x])$
  - $P$  : probabilité,  $F$  : Fonction de répartition
  - $F$  est une fonction croissante (au sens large), avec  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
- Soit  $A \subset \mathbb{R}$ , tel que  $P(X \in A)$  est bien défini
- La fonction  $A \rightarrow P(X \in A)$  est la loi de probabilité de  $X$
- Connaître la fonction de répartition  $F$  suffit à déterminer la loi de probabilité de  $X : A = ]-\infty, x]$ 
  - Etant donné  $F$ , il existe une unique loi de probabilité dont la fonction de répartition est  $F$

90

## Rappels succincts de probabilité :

- $X$ , variable aléatoire réelle positive, admet une densité  $f$  si l'on peut écrire la fonction de répartition  $F$  comme
- $x \in \mathbb{R} \rightarrow F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} 1_{]0, x[}(u) f(u) du$
- $f$  : fonction réelle positive intégrable, d'intégrale égale à 1
- $x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) \geq 0$  et  $\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1$
- La mesure de Lebesgue est telle que  $\mu([a, b]) = b - a$ , pour,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq a \leq b$ . **C'est la mesure « longueur »**. On remarque que  $\int_a^b du = b - a$
- Soit  $A \subset \mathbb{R}$ , si  $\mu(A) = \int_{-\infty}^{\infty} 1_A(u) du$  est bien définie,  $\mu(A)$  est la mesure de Lebesgue (la longueur) de  $A$ 
  - Tout sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  n'est pas mesurable, mais la plupart des sous-ensembles « usuels » de  $\mathbb{R}$  le sont.
- Propriété :  $\mu(A) = 0 \Rightarrow P(X \in A) = \int_{-\infty}^{\infty} 1_A(u) f(u) du = 0$
- La loi de  $X$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue
- Les lois normales, log-normales, exponentielles sont dans ce cas

91

## Formalisation de l'augmentation de risque

- Rappel du cadre standard de l'économie du risque
  - Pour comparer deux « loteries » (valeurs d'actifs)
  - Les préférences d'un agent se caractérisent par sa fonction d'utilité  $u$
  - $X$  est préféré à  $Y$  si et seulement si  $E[u(X)] > E[u(Y)]$
  - $u$  est croissante (on préfère plus de richesse à moins) et définie à une transformation affine croissante près :  $u'(x) > 0$ 
    - Théorème de Von Neumann et Morgenstern
- $u$  est concave :  $u''(x) < 0$  (on suppose  $u''$  bien définie)
  - Concavité de  $u$  : en microéconomie, utilité marginale décroissante de la consommation.
  - En économie du risque, **aversion vis-à-vis du risque**
    - Ce point ne sera pas développé dans le cours cette année

92

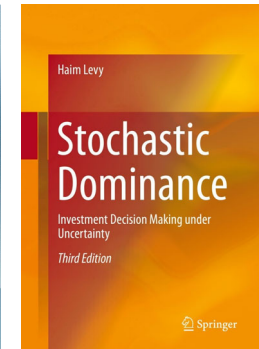
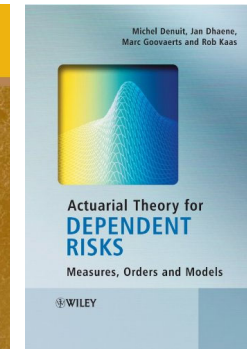
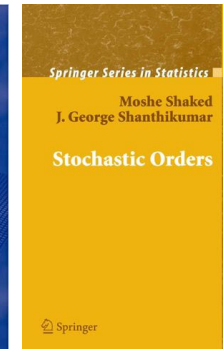
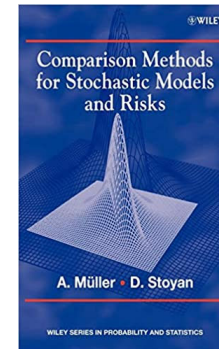
## Formalisation de l'augmentation de risque

- On est amené à comparer  $E[u(X)] > E[u(Y)]$  pour des fonctions  $u$  croissantes, concaves, croissantes et concaves.
  - *Ordre stochastique associé à une famille de fonctions*
    - Integral Stochastic Orders
  - $E^P[u(X)] = \int u(x)dP^X(x)$  (théorème dit « de transfert »)
    - $P^X$  (loi de  $X$ ) : mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}$  définie par  $P^X([-\infty, x]) = P(X \leq x), \forall x \in \mathbb{R}$
    - Si  $P^X$  admet une densité  $f$  (par rapport à la mesure de Lebesgue),  $\int u(x)dP^X(x) = \int u(x)f(x)dx$
  - Soit une famille de fonctions réelles  $u$ , par exemple les fonctions convexes, les fonctions concaves :  $\mathcal{G}$
  - On dira que  $X \succ_{\mathcal{G}} Y$  si  $\forall u \in \mathcal{G}, \int u(x)dP^X(x) \geq \int u(x)dP^Y(x)$ 
    - $\mathcal{G}$  : famille génératrice de l'ordre stochastique  $\succ_{\mathcal{G}}$
    - Sous quelques conditions techniques  $\succ_{\mathcal{G}}$  est une relation d'ordre

93

## Formalisation de l'augmentation de risque

- Ces concepts ont une longue histoire en mathématiques (théorie des ordres stochastiques), en théorie de la fiabilité, en économie du risque, dans le domaine de la finance, de l'assurance et de l'actuariat.



94

## Coût d'agence de la dette : formalisation de l'augmentation de risque

- Ordres stochastiques usuels
  - *Dominance stochastique ou ordre stochastique usuel : fonctions  $u$  croissantes*
  - *Ordre convexe (ou concave) : fonctions  $u$  convexes (ou concaves)*
  - *La dominance stochastique au second ordre ou ordre croissant concave :  $u$  croissantes et concaves*
  - *Ordre « stop-loss » :  $u(x) = (x - K)^+$*
- Pour chacun de ces ordres :
  - *Nous verrons plusieurs caractérisations équivalentes*
  - *Les implications sur les espérances et les variances des risques*
  - *Des relations entre ces ordres et des illustrations et exemples*

95

96



## Formalisation de l'augmentation du risque : dominance stochastique

## Dominance stochastique

- Définition 1 (dominance stochastique au premier ordre)
  - Soit deux variables aléatoires réelles  $X$  et  $Y$ 
    - définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .
  - $Y$  domine stochastiquement  $X$  et on note  $X <_{st} Y$ ,
  - Si et seulement  $E^P[u(X)] \leq E^P[u(Y)]$  pour toute fonction  $u$  croissante (telle que les espérances sont bien définies).
- Dominance stochastique au premier ordre
  - $<_{st}$  est souvent appelé ordre stochastique usuel.
  - On note aussi  $X <_{FSD} Y$
  - Les fonctions d'utilité sont croissantes, il est pertinent en économie de se placer dans ce cadre.

97

98

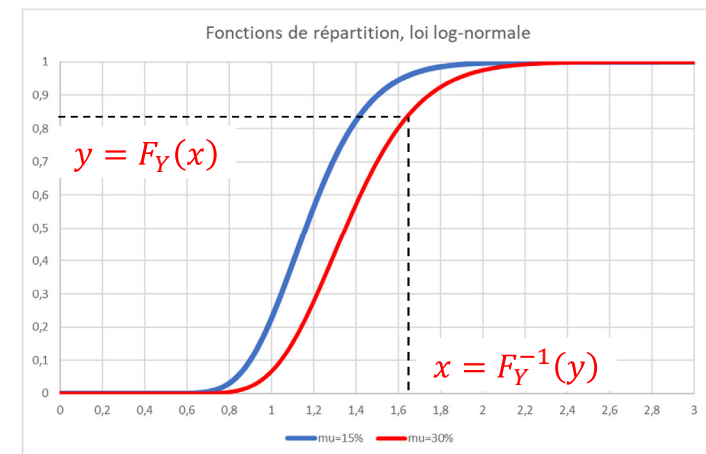
## Dominance stochastique

- Lien avec les fonctions de répartition.
  - On note  $F_X$  et  $F_Y$  les fonctions de répartition, associées respectivement à  $X$  et  $Y$
  - $x \in \mathbb{R} \rightarrow F_X(x) = P(X \leq x), F_Y(x) = P(Y \leq x)$
- Définition 2 :  $X$  est dominé par  $Y$  pour l'ordre stochastique usuel si  $F_X(x) \geq F_Y(x), \forall x \in \mathbb{R}$ 
  - $F_X(x) \geq F_Y(x), \forall x \in \mathbb{R}$  Il est **plus probable** que  $X$  prenne des **petites valeurs** que  $Y$

99

## Dominance stochastique

- Fonctions de répartition : cas log-normal
  - $\sigma = 20\%$ ,  $\mu = 30\%$ ,  $\mu = 15\%$ ,
  - $X = \exp(0,15 + 0,2U) <_{st} Y = \exp(0,30 + 0,2U)$ ,  $U \sim N(0, 1)$
  - $F_X(x) = P(\exp(0,15 + 0,2U) < x)$ ,  $F_Y(x) = P(\exp(0,30 + 0,2U) < x)$



100

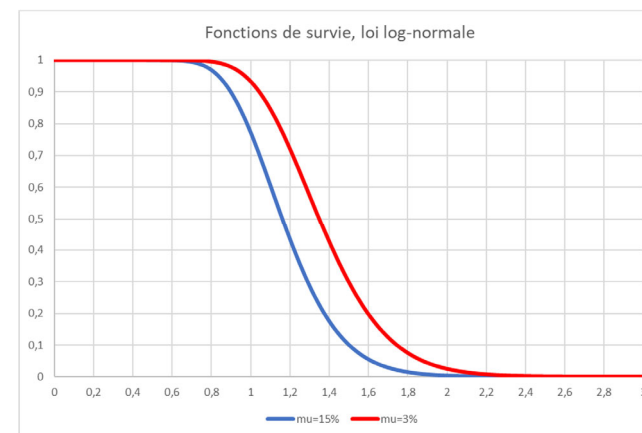
## Dominance stochastique

- Montrons que (1)  $\Rightarrow$  (2)
  - $x \in \mathbb{R} \rightarrow F_X(x) = P(X \leq x), F_Y(x) = P(Y \leq x)$
  - Soit  $t \in \mathbb{R} \rightarrow u(t) = 0$  si  $t \leq x, u(t) = 1$  si  $t > x$
  - $u$  est croissante (représenter le graphe de la fonction)
    - Au sens large et pas dérivable en  $x$
    - Si on voulait se limiter à des fonctions strictement croissantes et dérivables, un peu plus de « travail » serait nécessaire.
  - $E^P[u(X)] = E^P[1_{X>x}] = P(X > x) > E^P[u(Y)] = P(X > y)$
  - $F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X > x)$
  - $\Rightarrow F_X(x) \geq F_Y(x), \forall x \in \mathbb{R}$  :
    - Remarque : la fonction  $S_X$  définie par  $S_X(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x)$  est appelée fonction de survie de  $X$
    - $X <_{st} Y \Rightarrow S_X(x) \leq S_Y(x)$

101

## Dominance stochastique

- Fonctions de survie : cas log-normal
  - $\sigma = 20\%, \mu = 30\%, \mu = 15\%$ ,
  - $X = \exp(0,15 + 0,2U) <_{st} Y = \exp(0,30 + 0,2U), U \sim N(0,1)$
  - $S_X(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x), S_Y(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x)$



102

## Dominance stochastique

- **Définition 3** :  $Y$  domine stochastiquement  $X$ , s'il existe deux variables aléatoires  $\hat{X}, \hat{Y}$  de même loi, respectivement que  $X$  et  $Y, \hat{X} \leq \hat{Y}$
- On va montrer que (2)  $\Rightarrow$  (3), puis que (3)  $\Rightarrow$  (2)
- C'est-à-dire que les définitions (2) et (3) sont équivalentes
- Pour montrer (2)  $\Rightarrow$  (3), on fera une hypothèse simplificatrice
  - Donc on peut facilement s'affranchir, mais il faudrait introduire la notion d'inverse généralisée d'une fonction croissante (au sens large).

103

## Dominance stochastique

- Démonstration de (2)  $\Rightarrow$  (3)
  - Hypothèse : Supposons  $F_X$  et  $F_Y$  continues et strictement croissantes
    - Et non pas juste croissantes
  - Elles sont donc **inversibles**. On note  $F_X^{-1}$  et  $F_Y^{-1}$  les fonctions réciproques :  $y = F_X(x) \Leftrightarrow x = F_X^{-1}(y)$
  - $F_X(x) \geq F_Y(x) \Rightarrow x \geq F_X^{-1}(F_Y(x))$  ou  $F_Y^{-1}(y) \geq F_X^{-1}(y)$
  - Soit  $U \sim U[0,1]$  une variable aléatoire distribuée uniformément sur l'intervalle  $[0,1]$
  - $\hat{X} = F_X^{-1}(U)$  a comme fonction de répartition  $F_X$ 
    - En effet,  $P(F_X^{-1}(U) \leq x) = P(F_X(F_X^{-1}(U)) \leq F_X(x)) = P(U \leq F_X(x)) = F_X(x) = P(X \leq x)$
  - $\hat{X} = F_X^{-1}(U), \hat{Y} = F_Y^{-1}(U), \hat{X}$  et  $\hat{Y}$  ont la même fonction de répartition que, respectivement  $X$  et  $Y$ , donc sont de même loi.
  - $\hat{X} = F_X^{-1}(U) \leq F_Y^{-1}(U) = \hat{Y}$ , CQFD

104

## Dominance stochastique

- Réciproque (3)  $\Rightarrow$  (2)
  - $\hat{X} \leq \hat{Y} \Rightarrow \{\hat{X} \leq t\} \supset \{\hat{Y} \leq t\} \Rightarrow P(\hat{X} \leq t) \geq P(\hat{Y} \leq t)$
  - $\hat{X}$  et  $X$  ont la même fonction de répartition  $F_X$ ,  $P(\hat{X} \leq t) = F_X(t)$
  - De même,  $P(\hat{Y} \leq t) = F_Y(t)$
  - Donc  $F_X(t) \geq F_Y(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$
- Ceci montre l'équivalence entre les définitions 2 et 3
  - Par ailleurs si  $\hat{X} \leq \hat{Y}$ ,  $u(\hat{X}) \leq u(\hat{Y})$  pour  $u$  croissante, d'où  $E^P[u(\hat{X})] \leq E^P[u(\hat{Y})]$
  - Comme  $X$  et  $\hat{X}$  sont de même loi,  $E^P[u(X)] = E^P[u(\hat{X})]$ . De même,  $E^P[u(Y)] = E^P[u(\hat{Y})]$
  - $E^P[u(X)] \leq E^P[u(Y)]$ . La définition 3 implique donc la définition 1
- $2 \Leftrightarrow 3 \Rightarrow 1$ , comme  $1 \Rightarrow 2$ ,  $1 \Leftrightarrow 2$
- Les trois définitions sont équivalentes

## Formalisation de l'augmentation du risque : ordres convexe et concave

## Ordres convexe et concave

- Définitions : ordres concave et convexe
  - Soit  $X, Y$  deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , on dit que  $X$  est dominé par  $Y$ , au sens de l'ordre convexe, si pour toute fonction  $u$  convexe telle que les espérances suivantes sont bien définies :  $E^P[u(X)] \leq E^P[u(Y)]$
  - On note  $X <_{cx} Y$ 
    - Relation d'ordre partiel sur l'ensemble des variables aléatoires.
  - Remarque :  $X <_{cx} Y \Rightarrow E^P[X] = E^P[Y]$ 
    - Preuve :  $x \rightarrow x$  et  $x \rightarrow -x$  sont convexes, donc  $X <_{cx} Y \Rightarrow E^P[X] \leq E^P[Y]$  et  $E^P[Y] \leq E^P[X]$
  - Ordre concave : même définition en remplaçant convexe par concave. On note  $X <_{cv} Y$ 
    - Remarque :  $X <_{cv} Y \Rightarrow E^P[X] = E^P[Y]$

109

110

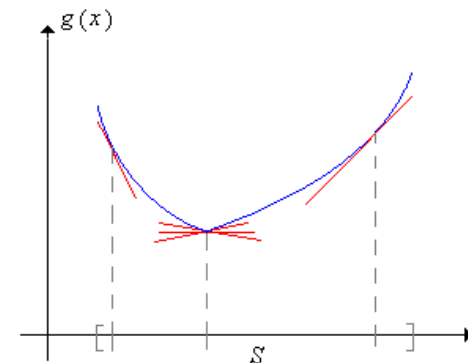
## Ordres convexe, concave, théorème de Strassen

- Remarque :  $X <_{cx} Y \Rightarrow \text{Var}[X] \leq \text{Var}[Y]$ 
  - $\text{Var}[X] = E^P[X^2] - (E^P[X])^2$
  - $x \rightarrow x^2$  est convexe :  $X <_{cx} Y \Rightarrow E^P[X^2] \leq E^P[Y^2]$
  - Comme par ailleurs  $E^P[X] = E^P[Y]$ , on obtient le résultat
- La réciproque n'est pas vraie
- Relation entre ordres convexe et concave :
  - $u$  concave  $\Leftrightarrow -u$  convexe
  - $X <_{cv} Y \Leftrightarrow Y <_{cx} X$ 
    - Les résultats relatifs à l'ordre convexe se transposent facilement à l'ordre concave et vice versa.
    - Par exemple,  $X <_{cv} Y \Rightarrow \text{Var}[X] \geq \text{Var}[Y]$ .

111

## Ordres convexe et concave

- Inégalité de Jensen : pour toute fonction  $u$  convexe et toute variable aléatoire  $X$ ,  $E^P[u(X)] \geq u(E^P[X])$ 
  - [https://en.wikipedia.org/wiki/Jensen%27s\\_inequality](https://en.wikipedia.org/wiki/Jensen%27s_inequality) : démonstration assez simple, par exemple en utilisant les « droites d'appui ».



En bleu, graphe d'une fonction convexe, en rouge exemples de droites d'appui. Les droites d'appui se confondent avec les tangentes en tout point de dérivabilité

112

## Implications de l'inégalité de Jensen

- $E^P[X] <_{cx} X$ 
  - Soit  $u$  convexe :  $E^P[u(X)] \geq u(E^P[X])$
  - $u(E^P[X]) = E^P[u(E^P[X])]$ , car  $u(E^P[X])$  constant
  - $E^P[u(X)] \geq E^P[u(E^P[X])] \Leftrightarrow$  Si on considère un ensemble de richesses aléatoires de même espérance  $\bar{E}$ , cette constante est la richesse la moins risquée au sens de l'ordre convexe.
- Payoffs de calls et de puts,  $K \in \mathbb{R}$ 
  - $x \rightarrow (x - K)^+$ ,  $x \rightarrow (K - x)^+$  sont des fonctions convexes
  - $X <_{cx} Y \Rightarrow E^P[(X - K)^+] \leq E^P[(Y - K)^+]$
  - Si  $Y$  est plus risqué que  $X$  au sens de l'ordre convexe, alors la prime du call sur le sous-jacent  $Y$  est toujours plus élevée que celle de écrite sur le sous-jacent  $X$ , pour tout prix d'exercice  $K$
  - $X <_{cx} Y \Rightarrow E^P[(K - X)^+] \leq E^P[(K - Y)^+]$
  - Résultat identique pour les puts

113

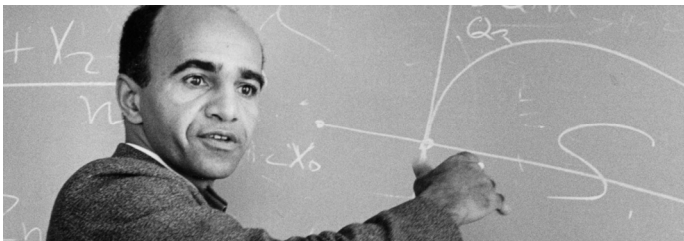
## Ordres convexe, concave, théorème de Strassen

- Théorème de Strassen
  - Strassen (1965). The existence of probability measures with given marginals. *The Annals of Mathematical Statistics*.
  - Résultat théorique de portée plus générale que notre contexte : variables aléatoires réelles, caractérisation de l'ordre convexe
  - Démonstration reposant sur des théorèmes classiques de l'analyse fonctionnelle
- Corollaire du théorème de Strassen
  - *équivalence entre :*
  - $X <_{cx} Y$
  - *Il existe deux variables aléatoires  $\hat{X}, \hat{Y}$  de même loi, respectivement que  $X$  et  $Y$ , telles que :  $\hat{X} = E^P[\hat{Y}|\hat{X}]$*

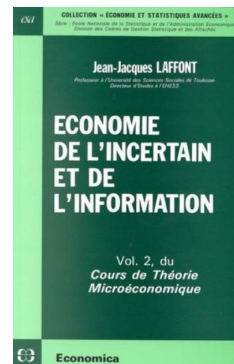
114

## Ordres convexe, concave, théorème de Strassen

- On trouve un résultat similaire dans Blackwell (1953)
  - Blackwell (1953). Equivalent comparisons of experiments. *The annals of mathematical statistics*.



David Blackwell est un pionnier de la théorie de l'information. Voir l'ouvrage de J-J. Laffont.

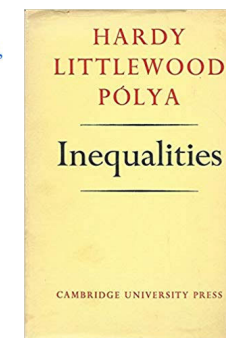


115

## Ordres convexe, concave, théorème de Strassen

- On retrouve aussi une démonstration dans le livre de Hardy, Littlewood et Pólya (1934) (section 2.19)

Godfrey Harold Hardy, 1877–1947, is on the left with John Edensor Littlewood, 1885–1977, at Trinity College, Cambridge



Kenneth Arrow & David Blackwell

Basically, I'm not interested in doing research and I never have been . . . I'm interested in understanding, which is quite a different thing. And often to understand something you have to work it out yourself because no one else has done it.

David Blackwell.

116

## Ordres convexe, concave, théorème de Strassen

- **Interprétation du résultat** : « Il existe deux variables aléatoires  $\hat{X}, \hat{Y}$  de même loi, respectivement que  $X$  et  $Y$ , telles que :  $\hat{X} = E^P[\hat{Y}|\hat{X}]$  »
  - $E^P[\hat{Y}|\hat{X}]$  est l'espérance conditionnelle de  $\hat{Y}$  sachant  $\hat{X}$
  - Notons  $\varepsilon = \hat{Y} - \hat{X} : \hat{Y} = \hat{X} + \varepsilon$
  - $\hat{X} = E^P[\hat{Y}|\hat{X}] \Rightarrow \hat{X} = E^P[\hat{X} + \varepsilon|\hat{X}] = \hat{X} + E^P[\varepsilon|\hat{X}]$
  - $\Rightarrow E^P[\varepsilon|\hat{X}] = 0$
- $\hat{Y} = \hat{X} + \varepsilon$  : On obtient  $\hat{Y}$  à partir de  $\hat{X}$  en lui rajoutant un bruit  $\varepsilon$  de moyenne (sachant  $\hat{X}$ ) nulle
  - $E^P[\varepsilon|\hat{X}] = 0 \Rightarrow E[\varepsilon] = 0, \rho_{\varepsilon\hat{X}} = 0$  (corrélation nulle entre  $\varepsilon$  et  $\hat{X}$ )
  - $E^P[\varepsilon] = 0$  et indépendance entre  $\varepsilon$  et  $\hat{X} \Rightarrow E^P[\varepsilon|\hat{X}] = 0$
  - La réciproque est fautive (voir exemple plus loin)

117

## Ordres convexe, concave, théorème de Strassen

- Rothschild et Stiglitz montrent comment passer du risque  $X$  au risque  $Y$  par une suite de transformations élémentaires, appelées “mean preserving spread”
  - Rothschild & Stiglitz (1970). Increasing risk: I. A definition. Journal of Economic theory



Michael Rothschild

[https://www.youtube.com/watch?v=CoounLkiz\\_k](https://www.youtube.com/watch?v=CoounLkiz_k)



Joseph Stiglitz à l'Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne en octobre 2019, avec G. Capelle-Blancard  
<http://theconversation.com/la-finance-a-besoin-de-plus-de-superviseurs-conversation-avec-joseph-stiglitz-130257>

118

## Ordres convexe, concave, théorème de Strassen

- **Démonstration du  $\Leftarrow$**  :
- Montrons que si  $\hat{Y} = \hat{X} + \varepsilon$  avec  $E^P[\varepsilon|\hat{X}] = 0$ , alors pour toute fonction  $u$  convexe,  $E^P[u(\hat{Y})] \geq E^P[u(\hat{X})]$
- On va supposer que le couple  $(\hat{X}, \varepsilon)$  admet une densité jointe, que l'on peut écrire  $(x, \varepsilon) \rightarrow g(\varepsilon|x) \times f(x)$ 
  - On peut traiter le cas général en utilisant le concept de probabilité conditionnelle régulière (ou noyau de transition) qui est toujours bien défini dans le cas de couple de variables aléatoires réelles.
  - $f(x)$  est la densité de  $\hat{X} : f \geq 0$  et  $\int f(x)dx = 1$
  - $g(\varepsilon|x)$  est la densité conditionnelle de  $\varepsilon$  sachant  $x$ . Pour tout  $x$ ,  $g(\cdot|x) \geq 0$ ,  $\int g(\varepsilon|x)d\varepsilon = 1$
  - En outre, la condition  $E^P[\varepsilon|\hat{X}] = 0$  s'écrit  $\int \varepsilon g(\varepsilon|x)d\varepsilon = 0$  pour tout  $x$

119

## Ordres convexe, concave, théorème de Strassen

- **Démonstration du  $\Leftarrow$**  :
- $E^P[u(\hat{X} + \varepsilon)] = \iint u(x + \varepsilon)g(\varepsilon|x) \times f(x)dxd\varepsilon$
- Pour  $x$  donné, on commence par intégrer par rapport à  $\varepsilon$
- $\int u(x + \varepsilon)g(\varepsilon|x)d\varepsilon \geq u(E^P[x + \varepsilon|x])$  par l'inégalité de Jensen
- $E^P[x + \varepsilon|x] = x + E^P[\varepsilon|x]$  (linéarité de l'espérance)
- Comme  $E^P[\varepsilon|x] = 0$  par hypothèse :
- $\int u(x + \varepsilon)g(\varepsilon|x)d\varepsilon \geq u(x)$
- $\iint u(x + \varepsilon)g(\varepsilon|x)f(x)dxd\varepsilon = \int (\int u(x + \varepsilon)g(\varepsilon|x)d\varepsilon)f(x)dx$ 
  - Théorème de Fubini
- $\int (\int u(x + \varepsilon)g(\varepsilon|x)d\varepsilon)f(x)dx \geq \int u(x) f(x)dx = E^P[u(\hat{X})]$
- Ce qu'on voulait démontrer.

120

## Ordre concave : applications à la comparaison de deux actifs d'entreprise



- $A_1 \prec_{cx} A_1^* \Leftrightarrow A_1^* \prec_{cv} A_1$ 
  - Les fonctions d'utilité sont concaves
- $A_1^* \prec_{cv} A_1 \Leftrightarrow \exists \varepsilon, A_1^* = A_1 + \varepsilon$ , avec  $E[\varepsilon|A_1] = 0$ 
  - $\rho_{\varepsilon A_1}$  coefficient de corrélation linéaire entre  $\varepsilon$  et  $A_1$  est nul
  - $\varepsilon$  : risque spécifique ou résultat d'un « pur pari »
  - Exemple : investissement financier risqué d'espérance nulle indépendant des risques liés à l'activité de l'entreprise
  - « spéculation financière »
- Implications sur la valeur espérée et la variance
  - $E[A_1^*] = E[A_1 + \varepsilon] = E[A_1] + E[\varepsilon] = E[A_1]$
  - $\sigma_{A_1^*}^2 = \sigma_{A_1}^2 + 2\rho_{A_1\varepsilon}\sigma_{A_1}\sigma_\varepsilon + \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_{A_1}^2 + \sigma_\varepsilon^2 \geq \sigma_{A_1}^2$

121

## Ordres convexe : cas gaussien

- $A_1$  et  $\varepsilon$  variables aléatoires gaussiennes (suivant des lois normales) indépendantes,  $\varepsilon$  centrée réduite
  - $E[\varepsilon] = 0, \text{Var}[\varepsilon] = 1$
- Notons  $\alpha > 0$  ( $\alpha$  scalaire), la taille de la position risquée
- $\alpha < \alpha^* \Rightarrow A_1 + \alpha\varepsilon \prec_{cx} A_1 + \alpha^*\varepsilon$ 
  - Le risque augmente avec la taille de la position risquée
- Preuve donnée dans le transparent suivant

122

## Ordres convexe : cas gaussien

- Soit  $A_1, \varepsilon, Z$  variables aléatoires gaussiennes indépendantes avec  $\varepsilon, Z \sim N(0,1)$ , alors  $A_1 + \alpha^*\varepsilon \sim A_1 + \alpha\varepsilon + \sqrt{\alpha^{*2} - \alpha^2} \times Z$ 
  - $\sim$  signifie l'égalité en loi.
  - Les deux termes de l'égalité sont des variables gaussiennes car toute combinaison linéaire de variables gaussiennes indépendantes est une variable aléatoire gaussienne.
  - On vérifie par ailleurs l'égalité des espérances et des variances d'où l'égalité en loi
- $E[A_1 + \alpha\varepsilon + \sqrt{\alpha^{*2} - \alpha^2} \times Z | A_1 + \alpha\varepsilon] = A_1 + \alpha\varepsilon + \sqrt{\alpha^{*2} - \alpha^2} \times E[Z | A_1 + \alpha\varepsilon]$  (linéarité de l'espérance)
- $E[Z | A_1 + \alpha\varepsilon] = E[Z] = 0$  (indépendance de  $Z$  et de  $A_1 + \alpha\varepsilon$ )
- D'où :  $E[A_1 + \alpha\varepsilon + \sqrt{\alpha^{*2} - \alpha^2} \times Z | A_1 + \alpha\varepsilon] = A_1 + \alpha\varepsilon$
- En appliquant le théorème de Strassen :  $A_1 + \alpha\varepsilon \prec_{cx} A_1 + \alpha^*\varepsilon$ 
  - Voir également examens du 4 mai 2018 et du 27 février 2020.

123

## Ordre convexe : lois log-normales

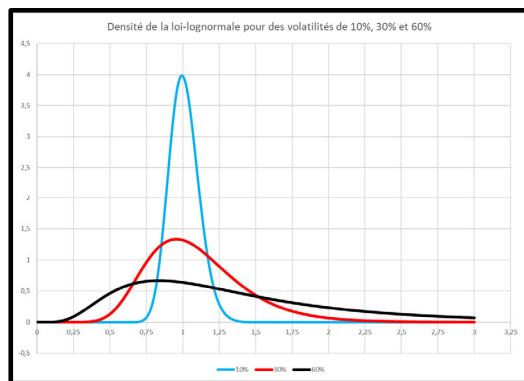
- Définition :  $Z$  suit une loi log-normale si  $\ln(Z) = X$  suit une loi normale.  $Z = \exp(X), X = E[X] + \sigma(X)U$ 
  - $Z$  log-normale si  $Z = \exp(a + bU)$  où  $U \sim N(0,1)$  et  $a, b \in \mathbb{R}$
- Propriété :  $U \sim N(0,1)$  et  $\sigma > 0 \Rightarrow E[\exp(\sigma U)] = \exp(\sigma^2/2)$ 
  - Ou de manière équivalente  $E[\exp(-\sigma^2/2 + \sigma U)] = 1$
  - Démonstration :
    - $E[\exp(\sigma U)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp(\sigma x) \times \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \int \exp\left(-\frac{(x-\sigma)^2}{2}\right) dx$
    - D'où le résultat puisque  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp\left(-\frac{(x-\sigma)^2}{2}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$  par le changement de variable  $x \rightarrow t = x - \sigma$
    - et  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = 1$  (intégrale de la densité gaussienne).
  - Remarque :  $\text{Var}[\exp(-\sigma^2/2 + \sigma U)] = \exp(\sigma^2) - 1 \nearrow$  avec  $\sigma$

124

## Ordre convexe : lois log-normales

- Modèle de Black et Scholes : prix de l'actif sous-jacent à la date  $t$ 
  - $S_t = S_0 \exp\left(\left(r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}U\right)$ ,  $r_f$  taux sans risque,  $\sigma$  volatilité
  - $U \sim N(0,1)$  sous probabilité risque neutre  $Q$
  - Pas de valeurs négatives contrairement à la loi normale
  - Densité de  $\exp(-\sigma^2/2 + \sigma U)$  pour des volatilités de 10%, 30% et 60%

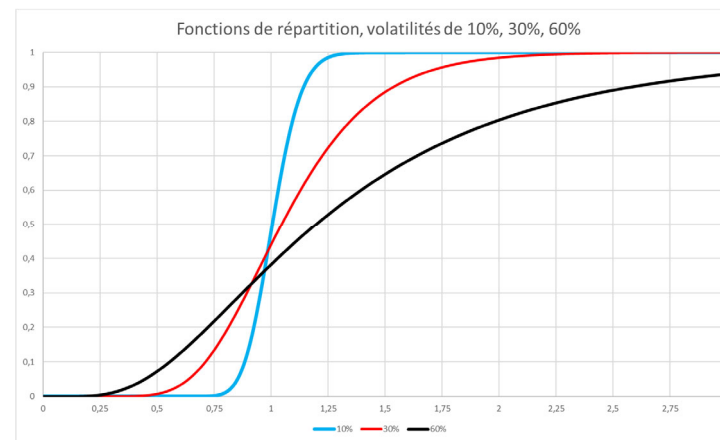
Pas de valeurs négatives  
contrairement à  
la loi normale



125

## Ordre convexe : lois log-normales

- Fonctions de répartition de  $\exp(-\sigma^2/2 + \sigma U)$ 
  - La courbe bleue est en dessous puis au dessus de la courbe rouge
  - La courbe rouge est en dessous puis au dessus de la courbe noire



126

## Ordre convexe : lois log-normales

- $\sigma' > \sigma \Rightarrow \exp(-\sigma'^2/2 + \sigma'U) <_{cx} \exp(-\sigma^2/2 + \sigma U)$ 
  - Démonstration : transparent suivant
- Donc  $\sigma' > \sigma \Rightarrow S_t(\sigma) = S_0 \exp\left(\left(r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}U\right) <_{cx} S_t(\sigma')$
- Pour un horizon de temps donné,  $\nearrow$  de la volatilité implique  $\nearrow$  du risque au sens de l'ordre convexe
- Prime de call de date d'exercice  $t$  et de prix d'exercice  $K$ :  
 $C(t, K, \sigma) = e^{-r_f t} E^Q[(S_t(\sigma) - K)^+]$
- $\sigma' > \sigma \Rightarrow C(t, K, \sigma) < C(t, K, \sigma')$ 
  - En effet, la fonction  $S_t \rightarrow (S_t(\sigma) - K)^+$  est convexe
- Dans le modèle structurel de l'entreprise, les actions sont une option d'achat sur les actifs.
- Une augmentation du risque (la volatilité de l'actif) implique une augmentation de la valeur des actions

127

## Ordre convexe : lois log-normales

- Démonstration du résultat précédent
- Soit  $U, V$  deux variables aléatoires indépendantes,  $U, V \sim N(0,1)$
- $\sigma'Z = \sigma U + \sqrt{\sigma'^2 - \sigma^2}V$ , où l'égalité précédente est en loi,  $Z \sim N(0,1)$
- $\exp(-\sigma'^2/2 + \sigma'Z) = \exp(-\sigma'^2/2 + \sigma U + \sqrt{\sigma'^2 - \sigma^2}V) = \exp(-\sigma^2/2 + \sigma U) \times \exp(-(\sigma'^2 - \sigma^2)/2 + \sqrt{\sigma'^2 - \sigma^2}V)$
- $E[\exp(-\sigma'^2/2 + \sigma U + \sqrt{\sigma'^2 - \sigma^2}V) | \exp(-\sigma^2/2 + \sigma U)] = \exp(-\sigma^2/2 + \sigma U) \times E[\exp(-(\sigma'^2 - \sigma^2)/2 + \sqrt{\sigma'^2 - \sigma^2}V) | \exp(-\sigma^2/2 + \sigma U)]$
- $E[\exp(-(\sigma'^2 - \sigma^2)/2 + \sqrt{\sigma'^2 - \sigma^2}V) | \exp(-\sigma^2/2 + \sigma U)] = E[\exp(-(\sigma'^2 - \sigma^2)/2 + \sqrt{\sigma'^2 - \sigma^2}V)]$ 
  - $\exp(-\sigma^2/2 + \sigma U)$  et  $\exp(-(\sigma'^2 - \sigma^2)/2 + \sqrt{\sigma'^2 - \sigma^2}V)$  indépendantes
  - $U$  et  $V$  sont indépendantes  $\Rightarrow f(U)$  et  $g(V)$  sont indépendantes,  $\forall f, g$  fonctions mesurables
- $E[\exp(-(\sigma'^2 - \sigma^2)/2 + \sqrt{\sigma'^2 - \sigma^2}V)] = 1$

128



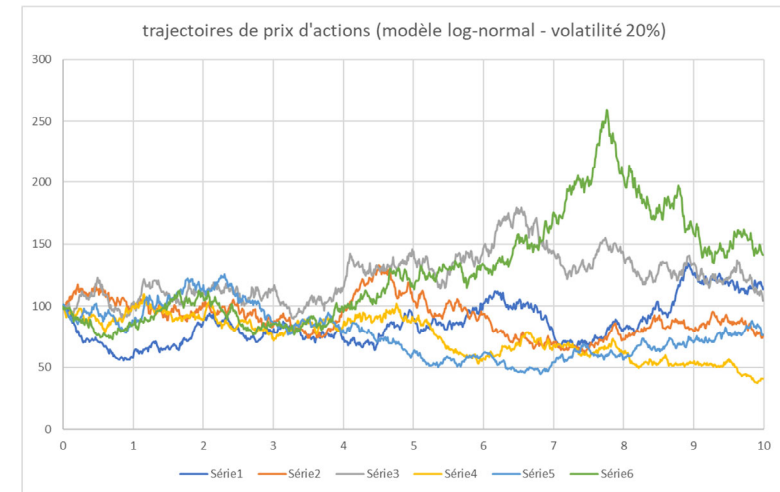
## Ordre convexe : lois log-normales

- Fin de la démonstration :
  - $\exp(-\sigma'^2/2 + \sigma'Z) \sim \exp(-\sigma'^2/2 + \sigma'U)$
  - $E[\exp(-\sigma'^2/2 + \sigma'Z) | \exp(-\sigma^2/2 + \sigma U)] = \exp(-\sigma^2/2 + \sigma U)$
- Le théorème de Strassen implique :
  - $\exp(-\sigma^2/2 + \sigma U) <_{cx} \exp(-\sigma'^2/2 + \sigma'U)$  CQFD
- Remarque :
  - $S_t = S_0 \exp\left((r_f - \sigma^2/2)t + \sigma\sqrt{t}U\right)$  modèle de Black et Scholes
  - $S_{t'} = S_0 \exp\left((r_f - \sigma^2/2)t' + \sigma\sqrt{t'}Z\right)$
  - $\sigma\sqrt{t'} \geq \sigma\sqrt{t}$  implique  $S_t <_{cx} S_{t'}$  si  $r_f = 0$
  - $S_{t'} e^{-r_f t'} = S_t e^{-r_f t} + \varepsilon$
  - $\varepsilon = S_t e^{-r_f t} \times \left(\exp\left(-(\sigma'^2 - \sigma^2)/2 + \sqrt{\sigma'^2 - \sigma^2}V\right) - 1\right)$
  - On a bien :  $E[\varepsilon | S_t] = 0$  mais  $\varepsilon$  n'est pas indépendant de  $S_t$  : la variance (conditionnelle) de  $\varepsilon$  dépend de  $S_t$

129

## Ordre convexe : lois log-normales

Exemples de trajectoires de  $S_t$  sur une période de 10 ans avec  $S_0 = 100, r_f = 0, \sigma = 20\%$



130

## Ordre convexe : lois log-normales

- Croissance des primes de call en fonction de la maturité :  $r_f = 0, t \leq t' \Rightarrow C(t, K) \leq C(t', K)$
- $S_t = S_0 \exp\left(\left(r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}U\right)$  modèle de Black et Scholes
  - si  $t \leq t', S_t e^{-r_f t} = \exp(-\sigma^2 t/2 + \sigma\sqrt{t}U) <_{cx} \exp(-\sigma^2 t'/2 + \sigma\sqrt{t'}Z) = S_{t'} e^{-r_f t'}$
  - $\Rightarrow E^Q [(S_t e^{-r_f t} - K)^+] \leq E^Q [(S_{t'} e^{-r_f t'} - K)^+]$
  - $\Rightarrow e^{-r_f t} E^Q [(S_t - K e^{r_f t})^+] \leq e^{-r_f t'} E^Q [(S_{t'} - K e^{r_f t'})^+]$
  - Soit  $C(t, K e^{r_f t}) \leq C(t', K e^{r_f t'})$  où  $C(t, K)$  est la prime d'un call de maturité  $t$  et de prix d'exercice  $K$ 
    - Si  $r_f = 0, t \leq t' \Rightarrow C(t, K) \leq C(t', K)$ ,

131

## Ordres convexe et ordre stop-loss

- **Définition : Stop-loss order**
  - $X <_{sl} Y \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}, E^P[(X - K)^+] \leq E^P[(Y - K)^+]$ 
    - Concept venant de la réassurance
    - On a déjà vérifié que :  $X <_{cx} Y \Rightarrow X <_{sl} Y$
- **Propriété :  $X <_{cx} Y \Leftrightarrow X <_{sl} Y$  et  $E^P[X] = E^P[Y]$** 
  - L'implication a déjà été démontrée
  - **Démonstration de la réciproque**
    - Supposons  $X <_{sl} Y$  et  $E^P[X] = E^P[Y]$
    - $X - K = (X - K)^+ - (K - X)^+$  (cf démonstration de la relation de parité call-put)
    - $E^P[(K - X)^+] = E^P[(X - K)^+] - E^P[X] + K = E^P[(X - K)^+] - E^P[Y] + K \leq E^P[(Y - K)^+] - E^P[Y] + K = E^P[(K - Y)^+]$
    - On a montré :  $E^P[(K - X)^+] \leq E^P[(K - Y)^+]$

132

## Ordres convexe et ordre stop-loss

- Propriété :  $X \prec_{cx} Y \Leftrightarrow X \prec_{sl} Y$  et  $E^P[X] = E^P[Y]$

- *Démonstration (suite)*

- Considérons  $u$  deux fois continûment dérivable
- $u(X) = u(a) + u'(a)(X - a) + \int_{-\infty}^a (K - X)^+ u''(K) dK + \int_a^{\infty} (X - K)^+ u''(K) dK$
- Voir démonstration de la formule de Carr et Madan (partiel février 2020)
- $E^P[u(X)] = u(a) + u'(a)(E^P[X] - a) + \int_{-\infty}^a E^P[(K - X)^+] u''(K) dK + \int_a^{\infty} E^P[(X - K)^+] u''(K) dK \leq u(a) + u'(a)(E^P[Y] - a) + \int_{-\infty}^a E^P[(K - Y)^+] u''(K) dK + \int_a^{\infty} E^P[(Y - K)^+] u''(K) dK = E^P[u(Y)]$
- On a démontré :  $E^P[u(X)] \leq E^P[u(Y)]$  pour toute fonction  $u$  convexe (deux fois continûment dérivable)
- $X \prec_{cx} Y$

133

134

135

136

## Formalisation de l'augmentation du risque : dominance stochastique au second ordre

## Augmentation de risque : SOSD

- Caractérisation du risque de l'actif  $A_1$ 
  - $A_1$  : Valeur future de l'actif (à la date 1),
  - $x \in \mathbb{R}^+ \rightarrow F(x) = P(A_1 \leq x)$
- Comment définir que  $A_1^*$  est plus risqué que l'actif  $A_1$  ?
  - $x \in \mathbb{R}^+ \rightarrow F^*(x) = P(A_1^* \leq x)$
  - $F^*$  fonction de répartition associée à la variable aléatoire  $A_1^*$
- Définition 1 :  $A_1 \succ_{SOSD} A_1^* \Leftrightarrow E[u(A_1)] \geq E[u(A_1^*)]$  pour toute fonction d'utilité  $u$  (croissante et concave)
  - $E[u(A_1)] = \int u(x)dF(x)$
  - $F$  : Fonction de répartition

137

138

## Augmentation de risque : SOSD

- Définition 1 (rappel) :  $A_1 \succ_{SOSD} A_1^* \Leftrightarrow E[u(A_1)] \geq E[u(A_1^*)]$  pour toute fonction d'utilité  $u$  (croissante concave)
  - $E[u(A_1)]$  : Espérance d'utilité de la richesse (Von Neumann Morgenstern)
  - $A_1 \succ_{SOSD} A_1^*$  signifie que  $A_1$  est préféré à  $A_1^*$  pour tout agent ayant des préférences à la Von Neumann et Morgenstern
  - $\succ_{SOSD}$  Relation d'ordre partiel entre variables aléatoires
  - SOSD : Second Order Stochastic Dominance en économie
  - "increasing concave order" (icv) en mathématiques :  
 $A_1 \succ_{SOSD} A_1^* \Leftrightarrow A_1^* \prec_{icv} A_1$
- Remarque :  $A_1 \succ_{SOSD} A_1^* \Rightarrow E[A_1^*] \leq E[A_1]$  ( $x \rightarrow u(x) = x$  est croissante concave)
- Remarque :  $A_1^* \prec_{cv} A_1 \Rightarrow A_1^* \prec_{icv} A_1$

139

## Augmentation de risque : SOSD

- Définition 2 :  $A_1 \succ_{SOSD} A_1^* \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}, E[\min(A_1, K)] \geq E[\min(A_1^*, K)]$
- Propriété : Les définitions 1 et 2 sont équivalentes
- (1)  $\Rightarrow$  (2) car  $K \rightarrow \min(A_1, K)$  est croissante et concave.
- (1)  $\Leftarrow$  (2) ?
  - Lemme :  $E[A_1] \geq E[A_1^*]$ 
    - Théorème de convergence monotone :  $X_n \uparrow X$  et  $E[|X|] < \infty \Rightarrow E[X_n] \rightarrow E[X]$
    - Prenons une suite croissante  $(K_n)$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \infty$
    - $\min(A_1, K_n) \uparrow A_1 \Rightarrow E[\min(A_1, K_n)] \rightarrow E[A_1]$
    - $\min(A_1^*, K_n) \uparrow A_1^* \Rightarrow E[\min(A_1^*, K_n)] \rightarrow E[A_1^*]$
    - $E[\min(A_1, K_n)] \geq E[\min(A_1^*, K_n)], \forall n \Rightarrow E[A_1] \geq E[A_1^*]$

140

## Augmentation de risque : SOSD

- Définition 2 :  $A_1 \succ_{SOSD} A_1^* \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}, E[\min(A_1, K)] \geq E[\min(A_1^*, K)]$
- Propriété : Les définitions 1 et 2 sont équivalentes
  - (1)  $\Rightarrow$  (2) car  $K \rightarrow \min(A_1, K)$  est croissante et concave.
  - (1)  $\Leftarrow$  (2) ? Suite
  - On va supposer que  $A_1, A_1^* \geq 0$ . Soit  $u$  avec  $u' > 0$  et  $u'' < 0$
  - $\int_0^\infty \min(x, K)u''(K)dK = \int_0^x Ku''(K)dK + x \int_x^\infty u''(K)dK = [Ku'(K)]_0^x - \int_0^x u'(K)dK + x(u'(\infty) - u'(x)) = u(0) - u(x) + xu'(\infty)$ 
    - $u'(\infty)$  est bien défini et  $\geq 0$  car  $u'$  décroissante et  $u' > 0$
  - $u(x) = u(0) + xu'(\infty) - \int_0^\infty \min(x, K)u''(K)dK$
  - $E[u(A_1)] = u(0) + E[A_1]u'(\infty) - \int_0^\infty E[\min(A_1, K)]u''(K)dK$
  - $\Rightarrow E[u(A_1)] \geq E[u(A_1^*)]$ , car  $u'(\infty) \geq 0$ ,  $E[A_1] \geq E[A_1^*]$ ,  $-u''(K) \geq 0$ ,  $E[\min(A_1, K)] \geq E[\min(A_1^*, K)]$

141

## Augmentation de risque : SOSD

- Définition 3 :  $F$  domine stochastiquement au second ordre  $F^*$  si  $\int_{-\infty}^K (F^*(x) - F(x)) dx \geq 0, \forall K \in \mathbb{R}$
- Propriété : Les définitions 2 et 3 sont équivalentes :
  - $E[\min(A_1, K)] = \int_{-\infty}^\infty \min(x, K) dF(x) = \int_{-\infty}^K x dF(x) + K \int_K^\infty dF(x)$
  - $K \int_K^\infty dF(x) = K(1 - F(K))$
  - $\int_{-\infty}^K x dF(x) = [xF(x)]_{-\infty}^K - \int_{-\infty}^K F(x) dx$ , (intégration par parties)
  - $\lim_{x \rightarrow -\infty} xF(x) = 0$  si  $E[|A_1|] < \infty$  (via théorème convergence monotone)
  - $E[\min(A_1, K)] = K(1 - F(K)) + KF(K) - \int_{-\infty}^K F(x) dx$
  - $E[\min(A_1, K)] = K - \int_{-\infty}^K F(x) dx$
  - $E[\min(A_1, K)] - E[\min(A_1^*, K)] = \int_{-\infty}^K (F^*(x) - F(x)) dx$
  - $E[\min(A_1, K)] \geq E[\min(A_1^*, K)] \Leftrightarrow \int_{-\infty}^K (F^*(x) - F(x)) dx \geq 0$

142

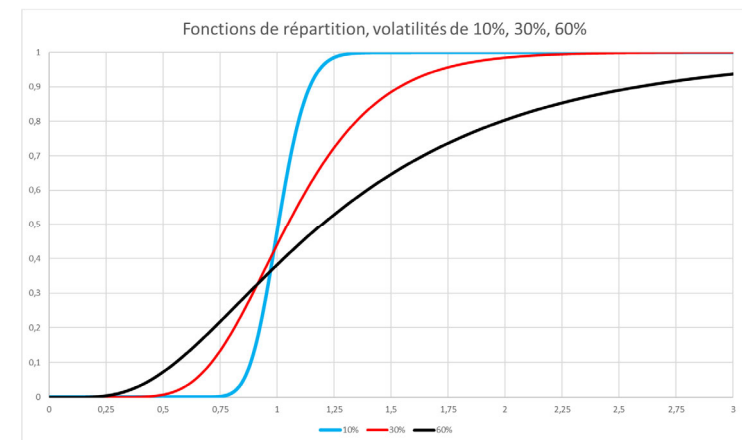
## Augmentation de risque : SOSD

- Définition 4 :  $A_1 \succ_{SOSD} A_1^*$ , s'il existe  $\hat{A}_1$  et  $\hat{A}_1^*$ , de mêmes lois respectivement que  $A_1$  et  $A_1^*$  tels que  $\hat{A}_1^* = \hat{A}_1 + \varepsilon$ , avec  $E[\varepsilon | \hat{A}_1] \leq 0$ 
  - On rajoute à  $\hat{A}_1$  un bruit d'espérance conditionnelle négative
  - Dans le cas de l'ordre stochastique usuel  $\varepsilon \leq 0$
  - Dans le cas de l'ordre convexe/concave  $E[\varepsilon | A_1] = 0$
- Propriété : Les quatre définitions précédentes sont équivalentes.
  - (1)  $\Leftrightarrow$  (2)  $\Leftrightarrow$  (4)
    - Rothschild & Stiglitz (1970). Increasing risk: I. A definition. *Journal of Economic theory*
  - (2)  $\Leftrightarrow$  (3)
    - Hadar & Russell (1969). Rules for ordering uncertain prospects. *The American economic review*.
    - Levy & Hanoch (1970). Relative effectiveness of efficiency criteria for portfolio selection. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*.

143

## Augmentation de risque - SOSD : lois log-normales

- Fonctions de répartition de  $\exp(-\sigma^2/2 + \sigma U)$ 
  - La courbe bleue est en dessous puis au dessus de la courbe rouge
  - La courbe rouge est en dessous puis au dessus de la courbe noire
  - Unique croisement implique SOSD



144

## Augmentation de risque : SOSD

- Démonstration de l'équivalence entre définition 4 et les autres définitions
- Partons de la définition 4 : on suppose  $A_1^* = A_1 + \varepsilon$  (où l'égalité est en loi) avec  $E[\varepsilon|A_1] \leq 0$
- On va chercher à montrer que  $E[u(A_1^*)] \leq E[u(A_1)]$  si  $u$  est croissante et concave.
- On reste dans le même cadre que celui de la démonstration du théorème de Strassen :  $(A_1, \varepsilon)$  a une densité jointe.
- $E[u(A_1 + \varepsilon)] = \iint u(x + \varepsilon)g(\varepsilon|x) \times f(x)dxd\varepsilon$
- Pour  $x$  donné, on commence par intégrer par rapport à  $\varepsilon$
- $\int u(x + \varepsilon)g(\varepsilon|x)d\varepsilon \leq u(E^P[x + \varepsilon|x])$  par l'inégalité de Jensen

145

## Augmentation de risque : SOSD

- $E[x + \varepsilon|x] = x + E[\varepsilon|x]$  (linéarité de l'espérance)
- $E[\varepsilon|x] \leq 0$ , par hypothèse
- Donc :  $u(E[x + \varepsilon|x]) = u(x + E[\varepsilon|x]) \leq u(x)$ , car  $u$  est croissante.
- $\int u(x + \varepsilon)g(\varepsilon|x)d\varepsilon \leq u(x)$
- $\iint u(x + \varepsilon)g(\varepsilon|x)f(x)dxd\varepsilon = \int (\int u(x + \varepsilon)g(\varepsilon|x)d\varepsilon)f(x)dx$  (Théorème de Fubini)
- $\int (\int u(x + \varepsilon)g(\varepsilon|x)d\varepsilon)f(x)dx \leq \int u(x) f(x)dx = E[u(A_1)]$
- Ce qui montre que la définition 4 implique la définition 1.

146

## Augmentation de risque : SOSD

- **Propriété (lien entre ordre concave et SOSD) :**  
 $A_1 \succ_{SOSD} A_1^*$  et  $E[A_1] = E[A_1^*]$ , alors  $A_1 \succ_{cv} A_1^*$ 
  - *Démonstration à compléter...*

147

148

## Asset substitution : formalisation

149

## Augmentation de risque



- Augmentation de risque et valeur des dettes et des actions
- La valeur à la date future d'une dette d'entreprise, dans le modèle structurel est égale à  $D_1 = \min(A_1, D_0 \times (1 + i))$
- Supposons qu'il y ait une « substitution d'actif » (asset substitution) :  $A_1 \rightarrow A_1^* = A_1 + \varepsilon$  avec  $E^Q[\varepsilon|A_1] \leq 0$ 
  - $\Rightarrow A_0 = \frac{1}{1+r_f} E^Q[A_1] \geq \frac{1}{1+r_f} E^Q[A_1^*]$ 
    - On ajoute à  $A_1$ , un risque, par exemple un pari sur les marchés financiers d'espérance, sachant  $A_1$  négative ou nulle
    - On a alors :  $A_1 \succ_{SOSD} A_1^*$ , la dominance au second ordre étant sous la probabilité risque neutre  $Q$ .
- L'augmentation du risque de l'actif implique une baisse de la valeur de la dette :  $A_1 \succ_{SOSD} A_1^* \Rightarrow$
- $\frac{1}{1+r_f} E^Q[\min(A_1^*, D_0(1+i))] \leq \frac{1}{1+r_f} E^Q[\min(A_1, D_0 \times (1+i))]$ 
  - $A_1 \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \min(A_1, D_0(1+i))$  est croissante concave

150

## Asset Substitution, formalisation

- Propriété : Augmentation de la valeur des actions ?
- $A_1 \succ_{cv} A_1^* \Rightarrow \frac{1}{1+r_f} E^Q[(A_1^* - D_0 \times (1+i))^+] \geq \frac{1}{1+r_f} E^Q[(A_1 - D_0 \times (1+i))^+]$
- $A_1^* = A_1 + \varepsilon, E^Q[\varepsilon|A_1] = 0$ 
  - Remarque :  $A_1^* = A_1 + \varepsilon$  et  $E^Q[\varepsilon] = 0$
  - $\frac{1}{1+r_f} E^Q[A_1^*] = \frac{1}{1+r_f} E^Q[A_1] \Rightarrow A_0^* = A_0$
  - Variation de la richesse des actionnaires (on suppose que  $r_f = 0$ )
  - $\Delta = E^Q[\max(0, A_1^* - D_0 \times (1+i))] - E^Q[\max(0, A_1 - D_0 \times (1+i))] \geq 0$
  - Variation de la valeur de la dette
  - $\nabla = E^Q[\min(A_1^*, D_0(1+i))] - E^Q[\min(A_1, D_0(1+i))] \leq 0$
- $\Delta + \nabla = 0$

151

## Asset Substitution, formalisation

assets  
debt holders  
firm's  
investing  
expected  
Asset  
riskier  
Substitution

- $\Delta + \nabla = 0$ 
  - L'augmentation de la richesse des actionnaires se fait au détriment des créanciers. Jeu à somme nulle :  $\Delta + \nabla = 0$  ?
  - Prenons  $r_f = 0$  pour alléger les écritures
  - $\Delta = E^Q[\max(0, A_1^* - D_0 \times (1+i))] - E^Q[\max(0, A_1 - D_0 \times (1+i))]$
  - $\nabla = E^Q[\min(A_1^*, D_0(1+i))] - E^Q[\min(A_1, D_0(1+i))]$
  - On utilise les équilibres bilanciaux
  - $A_1^* = K_1^* + D_1^* = \max(0, A_1^* - D_0 \times (1+i)) + \min(A_1^*, D_0(1+i))$
  - $A_1 = K_1 + D_1 = \max(0, A_1 - D_0 \times (1+i)) + \min(A_1, D_0(1+i))$
- $\Delta + \nabla = E^Q[A_1^*] - E^Q[A_1] = 0$ 
  - Puisque  $A_1^* = A_1 + \varepsilon$  et  $E^Q[\varepsilon] = 0$

152

## Asset Substitution, formalisation

- Remarque :  $A_1 \succ_{SOSD} A_1^* \not\Rightarrow \frac{1}{1+r_f} E^Q \left[ (A_1^* - D_0 \times (1+i))^+ \right] \geq \frac{1}{1+r_f} E^Q \left[ (A_1 - D_0 \times (1+i))^+ \right]$
- Une augmentation du risque des actifs au sens de la dominance stochastique au second ordre n'implique pas forcément une augmentation de la valeur des actions
  - Alors qu'elle implique une baisse de la valeur de la dette
- **Pourquoi ?**
  - Il faut revenir au théorème de Strassen :  $A_1 \succ_{SOSD} A_1^* \Leftrightarrow A_1^* = A_1 + \varepsilon$ , avec  $E^Q[\varepsilon|A_1] \leq 0$ .
  - On a ainsi deux effets opposés, l'ajout d'un bruit  $\varepsilon$  augmente le risque, ce qui bénéficie aux actionnaires (asset substitution).
  - Mais  $E^Q[\varepsilon|A_1] \leq 0$ , le risque supplémentaire a une VAN négative (détruit de la richesse)

153

## Asset Substitution, formalisation

- **Suite du corrigé**
  - Si le second effet l'emporte sur le premier, la richesse des actionnaires diminue
  - En revanche pour les créanciers, à la fois l'augmentation du risque et la destruction de valeur des actifs sont préjudiciables : l'augmentation du risque au sens de la dominance stochastique au second ordre diminue toujours la valeur des dettes
  - Ce point est illustré numériquement dans l'exercice suivant.

154

155

156

## Exercices

## Exercice

- Cet exercice illustre numériquement l'exercice théorique précédent et d'appliquer le concept SOSD
  - *Considérons les projets d'investissements déjà présentés*
    - $r_f = 10\%$ ,  $A_0 = 100$ ,  $A_1 = 110$ , placement sans risque
    - $A_0^* = 100$ ,  $A_1^* = 121$  avec probabilité  $1/2$ ,  $A_1^* = 77$  avec probabilité  $1/2$
    - La VAN du projet est  $-100 + E^Q[A_1^*]/(1 + r_f) = -10$
    - VAN actionnaires  $-0 + 1/2 \left( \frac{11}{1+10\%} + \frac{0}{1+10\%} \right) = 5 > 0$
    - VAN créanciers =  $-15$
  - *Montrer que  $A_1 \succ_{SOSD} A_1^*$*

157

158

## Exercice

## Exercice

- Cet exercice illustre également l'exercice théorique précédent
  - *Considérons les projets d'investissements*
    - $r_f = 10\%$ ,  $A_0 = 100$ ,  $A_1 = 110$ , placement sans risque
    - $A_0^* = 100$ ,  $A_1^* = 110$  avec probabilité  $1/2$ ,  $A_1^* = 77$  avec probabilité  $1/2$
    - La VAN du projet est  $-100 + E^Q[A_1^*]/(1 + r_f) = -15$
    - VAN actionnaires  $-0 + 1/2 \left( \frac{0}{1+10\%} + \frac{0}{1+10\%} \right) = 0$ 
      - Remarque : il ne peut pas y avoir de VAN négative pour les actionnaires dans cet exercice, car leur mise initiale est nulle (entreprise financée entièrement par les créanciers) et la responsabilité limitée n'implique aucun décaissement futur.
    - VAN créanciers =  $-15$
  - *Montrer que  $A_1 \succ_{SOSD} A_1^*$*

- $A_1 = 110$  valeur d'actif non aléatoire.
  - *Placement sans risque*
  - *Exemple : actif d'un fonds de placement ou d'une « narrow bank » constitué de réserves à la banque centrale ou d'obligations d'état (T-Bills américaines, ...)*
- Autre investissement  $A_1^*$ 
  - $A_1^* = 121$  avec probabilité  $1/2$
  - $A_1^* = 99$  avec probabilité  $1/2$
- *Peut-on comparer  $A_1$  et  $A_1^*$  au sens de l'ordre stochastique usuel, de l'ordre concave, de l'ordre convexe, de la dominance stochastique au second ordre ?*

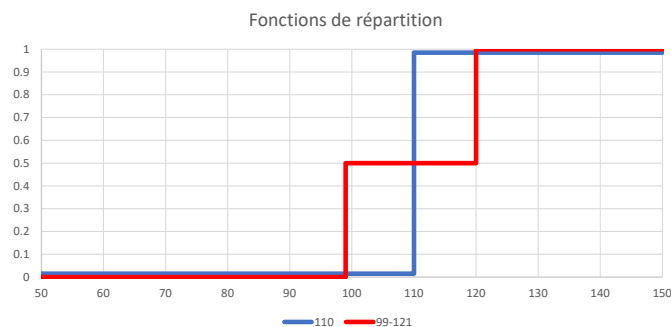
159

160



## Corrigé

- Le graphique ci-dessous représente les graphes des fonctions de répartition de  $A_1 : x \in \mathbb{R} \rightarrow F(x) = P(A_1 \leq x)$  et de  $A_1^* : x \in \mathbb{R} \rightarrow F^*(x) = P(A_1^* \leq x)$
- On remarque que  $F$  et  $F^*$  ne sont pas ordonnées, donc  $A_1$  et  $A_1^*$  ne sont pas ordonnés par l'ordre stochastique usuel  $<_{st}$



161

## Corrigé

- On peut écrire  $A_1^* = A_1 + \varepsilon$  où  $\varepsilon$  prend les valeurs  $+11$  et  $-11$  avec des probabilités de  $\frac{1}{2}$
- $\varepsilon$  correspond au résultat d'un tirage à pile ou face d'une pièce avec une mise de 11 euros.
- $A_1$  étant constant,  $\varepsilon$  est indépendant de  $A_1$
- $\varepsilon$  est un bruit d'espérance nulle et d'espérance conditionnelle sachant  $A_1$  nulle.
- Le théorème de Strassen implique que  $A_1^*$  est plus risqué au sens de l'ordre convexe que  $A_1 : A_1 <_{cx} A_1^*$ , ce qui est équivalent à  $A_1^* <_{cv} A_1$
- Enfin  $A_1^* <_{cv} A_1 \Rightarrow A_1^* <_{icv} A_1$  (ou  $A_1 >_{SOSD} A_1^*$ )

162

## Exercice

- Montrer que  $A_1 >_{SOSD} A_1^* \not\Rightarrow A_1 \geq A_1^*$ 
  - $A_1 = 100\$$  (une seule valeur, actif non risqué)
  - $A_1^* = 50\$$  avec probabilité  $1/2$  et  $A_1^* = 150\$$  avec probabilité  $1/2$
  - Définissons  $\varepsilon$  pari risqué, indépendant de  $A_1$
  - $\varepsilon = -50\$$  avec probabilité  $1/2$  et  $\varepsilon = 50\$$  avec probabilité  $1/2$
  - $A_1^* = A_1 + \varepsilon$ ,  $E[\varepsilon|A_1] = 0$
  - Strassen  $\Rightarrow A_1 >_{cv} A_1^*$
  - $A_1 >_{cv} A_1 \Rightarrow A_1 >_{SOSD} A_1^*$
  - Pourtant, on peut avoir  $A_1^* = 150\$ > A_1 = 100\$$

163

## Exercice

- $A_1 \geq A_1^* \not\Rightarrow A_1 >_{cv} A_1^*$ 
  - $A_1 = 100\$$  (une seule valeur, actif non risqué)
  - $A_1^* = 50\$$  avec probabilité  $1/2$  et  $A_1^* = 100\$$  avec probabilité  $1/2$
  - $A_1 \geq A_1^*$
  - A-t-on  $A_1 >_{cv} A_1^*$  ?  $A_1^* >_{cv} A_1$  ? Pourquoi ?
  - Aucune des deux inégalités précédentes ne peut être vraie, car elles impliquent chacune  $E[A_1] = E[A_1^*]$ . Or,  $E[A_1] = 100$ ,  $E[A_1^*] = 75$ . En revanche,  $A_1 >_{SOSD} A_1^*$

164

## Exercice

- Démontrer que :  $A_1 \succ_{cv} A_1^* \Leftrightarrow -A_1 \succ_{cv} -A_1^*$ 
  - Ceci montre que les ordres relatifs aux risques (aux "loteries" en économie) ne fonctionnent pas comme l'ordre usuel sur les nombres.
- Correction :
  - On part du théorème de Strassen
  - $A_1^* = A_1 + \varepsilon$ , avec  $E[\varepsilon|A_1] = 0$ 
    - On passe de  $A_1$  à  $A_1^*$  en ajoutant à  $A_1$  un bruit  $\varepsilon$  d'espérance, sachant  $A_1$  nulle.
  - $-A_1^* = -A_1 - \varepsilon$ , avec  $E[-\varepsilon|-A_1] = E[-\varepsilon|A_1] = 0$
  - Ce qui signifie  $-A_1 \succ_{cv} -A_1^*$

165

## Exercice : augmentation du risque pour des loteries à deux valeurs

- On repart des exemples d'investissement précédents
  - $A_1 = 110$
  - $A_1 = 121$  avec probabilité  $1/2$ ,  $A_1 = 99$
  - $A_1 = 132$  avec probabilité  $1/2$ ,  $A_1 = 88$  avec probabilité  $1/2$
- Montrer que la troisième loterie est plus risquée au sens de l'ordre convexe que la seconde. Généraliser ce résultat
  - Indice : utiliser un arbre

166

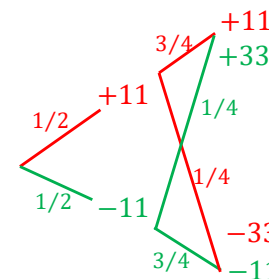
## Exercice : augmentation du risque pour des loteries à deux valeurs

- Notons  $L_1$  la variable aléatoire qui prend la valeur  $+11$  avec probabilité  $\frac{1}{2}$  et  $-11$  avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ 
  - Le résultat du second investissement peut s'écrire  $110 + L_1$
- Notons  $L_2$  la variable aléatoire qui prend la valeur  $+22$  avec probabilité  $\frac{1}{2}$  et  $-22$  avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ 
  - Le résultat du second investissement peut s'écrire  $110 + L_2$ 
    - $L_1$  peut se voir comme le résultat d'un jeu à pile ou face avec une mise de 11, pour  $L_2$  la mise est de 22
  - Pour appliquer Strassen, il faut écrire  $L_2 = L_1 + \varepsilon$ , avec  $E[\varepsilon|L_1] = 0$
  - Si  $L_1$  prend la valeur  $+11$ , il faut que  $\varepsilon$  prenne soit la valeur  $+11$ , soit la valeur  $-33$ , pour retomber sur des valeurs de  $+22$  et  $-22$ .
  - Si la probabilité d'obtenir  $+11$  est de  $\frac{3}{4}$  et celle d'obtenir  $-33$  est de  $\frac{1}{4}$  alors l'espérance de  $\varepsilon$  est égale à 0

167

## Exercice : augmentation du risque pour des loteries à deux valeurs

- Suite
  - Si  $L_1$  prend la valeur  $-11$ , il faut que  $\varepsilon$  prenne soit la valeur  $+33$ , soit la valeur  $-11$ , pour retomber sur des valeurs de  $+22$  et  $-22$ .
  - Si la probabilité d'obtenir  $+33$  est de  $\frac{1}{4}$  et celle d'obtenir  $-11$  est de  $\frac{3}{4}$  alors l'espérance de  $\varepsilon$  est égale à 0
  - Ceci est résumé dans l'arbre ci-dessous

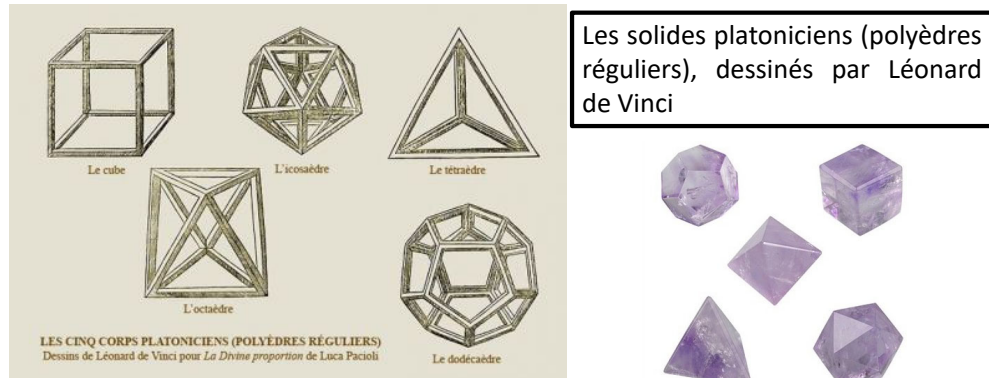


Remarque : on a bien  $E[\varepsilon|L_1 = +11] = 0$  et  $E[\varepsilon|L_1 = -11] = 0$ , mais  $\varepsilon$  et  $L_1$  ne sont pas indépendants. Par exemple, la probabilité d'une « grande perte » au second tour est plus élevée si on a gagné au premier tour.

168

## Intermède...

- Comment faire pour jouer à la loterie précédente, avec probabilités  $\frac{3}{4}$  et  $\frac{1}{4}$  ?
  - Avec un tétraèdre régulier (il faut en avoir un sous la main...)
  - Avec deux lancer de pièce : gain si  $\{PP, PF, FP\}$  et perte si  $\{FF\}$



169

## Exercice : augmentation du risque pour des loteries à deux valeurs

- Généralisation : Les loteries précédentes s'écrivent comme  $L_\lambda = \lambda \times L$  où  $L = +1$  avec probabilité  $\frac{1}{2}$  et  $L = -1$  avec probabilité  $\frac{1}{2}$ .
  - $\lambda$  est la mise
- On veut montrer  $\lambda \leq \lambda' \Rightarrow L_\lambda <_{cx} L_{\lambda'}$ 
  - À compléter par vous-même
  - Donner une démonstration à partir de fonctions tests convexes

170

## Exercice : pile ou face et augmentation du risque et marche aléatoire discrète

- On considère un jeu de pile ou face avec une « pièce équilibrée » (équiprobabilité).
- Si pile, gain de 1€, si face, perte de 1€
- On note  $S_n$  le gain cumulé au coup  $n$ .  $n \leq n^*$
- **Montrer que si  $n \leq n^*$ , alors  $S_n <_{cx} S_{n^*}$** 
  - Le gain cumulé devient de plus en plus risqué.
  - C'est une variante discrète du résultat démontré avec les prix d'actifs dans le modèle log-normal de Black et Scholes

171

## Exercice : pile ou face et augmentation du risque et marche aléatoire discrète

- Corrigé :
  - On note  $X_{n+1}$  le gain au coup  $n + 1$
  - $X_{n+1} = +1$  avec probabilité  $\frac{1}{2}$  et  $-1$  avec probabilité  $\frac{1}{2}$
  - $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$
  - $X_{n+1}$  et  $S_n$  indépendants, donc  $E[X_{n+1}|S_n] = E[X_{n+1}] = 0$
  - Le théorème de Strassen implique  $S_n <_{cx} S_{n+1}$
  - Par récurrence  $n \leq n^* \Rightarrow S_n <_{cx} S_{n^*}$
- Remarque :
  - $S_n$  marche aléatoire discrète (en temps et en valeurs), cela correspond à ce qu'on appelle une martingale : Les incréments de richesse ont une espérance conditionnelle nulle.
  - Cela correspond au modèle de Black et Scholes : dates dans  $\mathbb{R}$  et prix dans  $\mathbb{R}^+$
  - « Le risque augmente avec le temps ». Il est préférable pour les actionnaires, toutes choses égales par ailleurs, d'avoir des dettes plus longues (ou de pouvoir repousser les échéances).

172