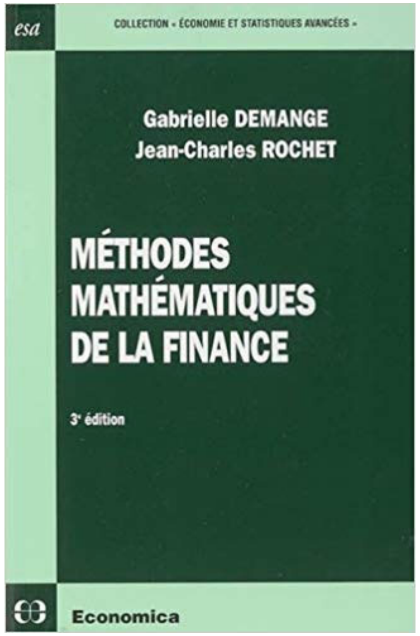
Ouvrage de référence pour la partie relative aux actifs contingents



La fabrique des produits dérivés

- Cas statique : une seule période future
  - *Exemple : credit default swaps (CDS)*
  - *Exemple : butterfly et options d'achat*
  - *Un actif risqué prenant des valeurs entières, options d'achat de prix d'exercice entiers et un actif sans risque*
  - *Prix des actifs contingents et probabilité risque-neutre : principe d'évaluation*
  - *Identification des états de la nature*
  - *Options digitales*
  - *Exercices : cas statique*
- Introduction au cas dynamique : le modèle binomial

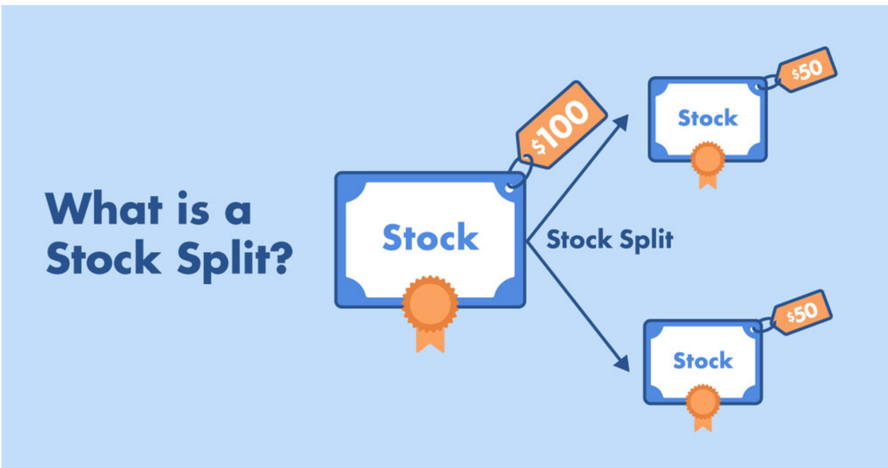
Évaluation par duplication : exercice

- On suppose que l'on peut acheter et vendre des pommes et des oranges, sans coûts de transaction
  - *Pommes et oranges sont les actifs élémentaires*

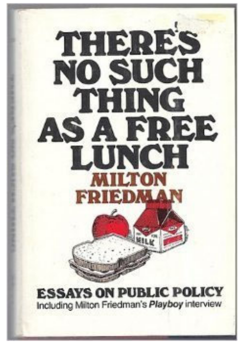
  - *On peut acheter un panier de 2 pommes et 3 oranges pour 8 euros*
  - *On peut acheter un panier de 3 pommes et 3 oranges pour 9 euros*
  - *Comment obtenir une pomme ? Quel est son prix ?*
  - *Comment obtenir une orange ? Quel est son prix ?*
  - *Quel est le prix d'un panier de n pommes et m oranges ($n, m \in \mathbb{N}$)*

Évaluation par duplication : exercice

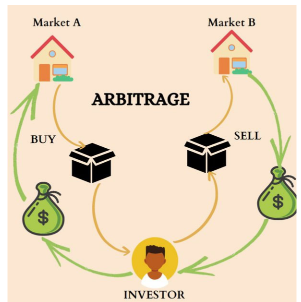
- Comment obtenir une pomme ? Quel est son prix ?
  - *On achète le panier 2 et on vend le panier 1, ce qui permet d'avoir une pomme pour le prix d'un euro.*
  - *On achète trois paniers 1 et on vend deux paniers 2, ce qui nous permet d'avoir trois oranges au prix de $3 \times 8 - 2 \times 9 = 6$ euros, soit 2 euros par orange.*
    - Passer de trois oranges à 6 euros à une orange à deux euros correspond à un stock split (division d'actions)
  - *Le prix du panier est $n + 2m$ euros*
  - *Le marché est ici complet et sans opportunité d'arbitrage*
- On suppose maintenant que le prix du panier 1 est de 9 euros. Que se passe-t-il ?
- On suppose maintenant que le prix du panier 1 est de 10 euros. Que se passe-t-il ?



Évaluation par duplication : exercice



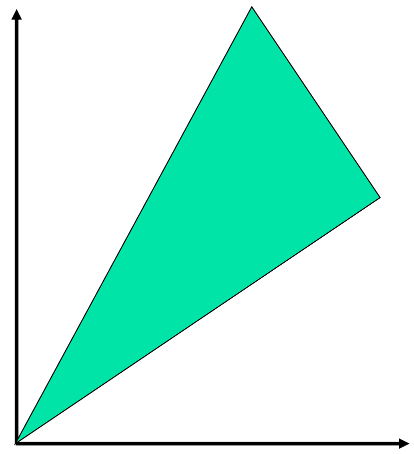
- En achetant le panier 2 et en vendant le panier 1, il nous reste une orange gratuite. C'est ce qu'on appelle un « free lunch ».
- En achetant le panier 2 et en vendant le panier 1, on reçoit une orange et un euro en prime : on est payé pour recevoir une orange.
- Ces deux cas, prix de l'orange nul, prix de l'orange négatif correspondent à des opportunités d'arbitrage.
- Ecrire les contraintes sur le prix des paniers (notés x, y) pour qu'il n'y ait pas d'opportunité d'arbitrage.



Évaluation par duplication : exercice

- On note p le prix d'une pomme et q le prix d'une orange.
- On cherche l'ensemble des (x, y) tels que :
- $\begin{cases} 2p + 3q = x \\ 3p + 3q = y \end{cases}$ avec $p, q > 0$.
- En résolvant le système précédent, on obtient $p = y - x > 0$ et $q = x - \frac{2}{3}y > 0$
- Soit $y > x$ et $y < \frac{3}{2}x$
- Par ailleurs les prix des paniers doivent être positifs : $x, y > 0$
- L'ensemble des (x, y) admissibles est facile à représenter graphiquement et forme un cône convexe épointé (voir transparent suivant)

A compléter …



Évaluation par duplication

Évaluation par duplication

- L'évaluation par duplication à partir de produits financiers élémentaires est au cœur de l'approche de Modigliani et Miller
- On peut accéder à l'actif en achetant des actions et des obligations (les deux briques élémentaires ici)
  - *On peut modifier le levier d'endettement au niveau de l'investisseur en variant la proportion d'actions et d'obligations*
    - *"No matter how hard he tries, a dairy farmer can't increase the value of his milk by selling the cream on the top separately from the milk on the bottom.*
    - *What he gains in price when selling the cream, he'll lose in price when selling the milk"* (Modigliani et Miller)
  - *C'est une image qu'il faut relativiser*
    - Niches spécifiques d'investisseurs pour les actions et les obligations
    - Sans parler des financements hybrides, des divisions de titres, …
    - Création de valeur dans le cadre de la finance structurée

Évaluation par duplication et credit default swap (CDS)

- Les actifs contingents sont proches de l'assurance
  - *Si le revenu d'un agent est bas dans l'état D, il peut s'*assurer *contre ce risque en achetant de l'actif contingent à cet état*
- Fabrication d'actifs contingents au défaut de l'entreprise

Paiements de l'obligation risquée de taux nominal r_f pour les états défaut (*D*) et non-défaut (*ND*)

$\boldsymbol{\delta(1+r_f)}$ (D)

$\boldsymbol{1+r_f}$ (ND)

δ : taux de recouvrement

Démembrement de l'obligation risquée en deux tranches

$\boldsymbol{\delta(1+r_f)}$ (D) ; $\boldsymbol{0}$ (ND) $+$ 0 (D) ; $\boldsymbol{1+r_f}$ (ND)

- *La somme des prix des actifs contingents est le prix de l'obligation risquée*

Évaluation par duplication et Credit Default Swap (CDS)

- L'intermédiaire qui réalise le démembrement …
  - *a créé deux marchés à partir d'un seul, et ceci sans risque.*
- Comment établir le prix relatif des nouveaux actifs (contingents) ?
  - *Supposons qu'il existe une obligation sans risque de défaut*

Paiements de l'obligation sans risque de défaut de taux nominal r_f

$\boldsymbol{1+r_f}$ (D)

$\boldsymbol{1+r_f}$ (ND)

- *Achat d'une obligation sans risque, vente d'une obligation risquée*

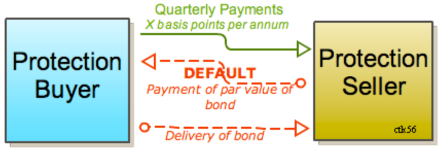
$$\boldsymbol{1+r_f-\delta(1+r_f)=(1-\delta)(1+r_f)} \quad (D)$$

$$\boldsymbol{1+r_f-(1+r_f)=0} \quad (ND)$$

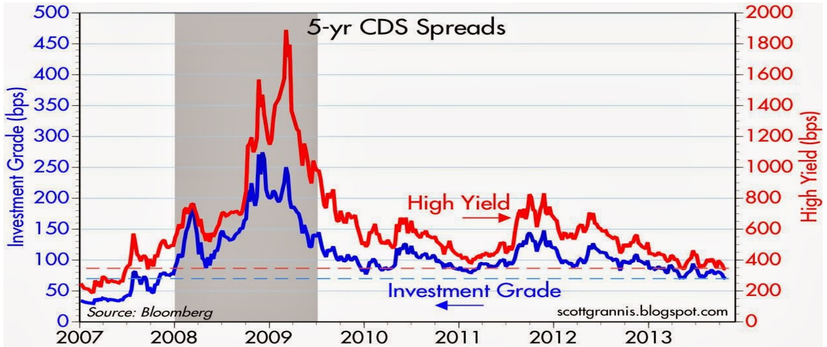
$1-\delta$: Loss Given Default

- ***Fabrication d'une assurance contre le défaut : CDS***

Évaluation par duplication et CDS



- Combinaison de plusieurs actifs existants
  - *Ici actif « sans risque » et actif soumis au risque de défaut*
- Prix de l'assurance contre le risque de défaut
  - *Prix de l'obligation sans risque de défaut moins prix de l'obligation risquée*



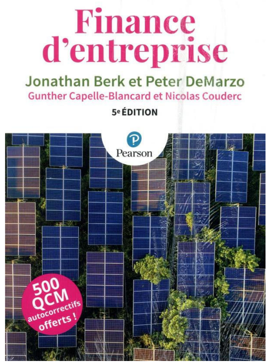
Évaluation par duplication

- Modèle à une période et deux états de la nature (suite)
  - *Extrait du livre de Berk et de Marzo (Finance d'entreprise, partie 7 : options et finance d'entreprise)*

On considère un call européen ayant pour sous-jacent une action et expirant dans une période. Son prix d'exercice est de 50 €. On suppose ici, comme dans toute la suite (sauf mention contraire), que l'action ne verse pas de dividende. L'action vaut 50 € au départ et ne peut prendre que deux valeurs à la fin de la période : 40 € (état baissier) ou 60 € (état haussier). Le bon du Trésor a une valeur initiale de 1 € et offre un taux de rendement de 6 % sur la période. Il est possible de résumer ces informations grâce à un **arbre binomial**. C'est un diagramme temporel dont chaque branche exprime un état de la nature possible à la fin de la période :

Dates :	**0**		**1**	
			Action	60 €
			Bon du Trésor	1,06 €
			Call	Max (60 – 50; 0) = 10 €
Action	50 €			
Bon du Trésor	1 €			
Call	C			
			Action	40 €
			Bon du Trésor	1,06 €
			Call	Max (40 – 50; 0) = 0 €

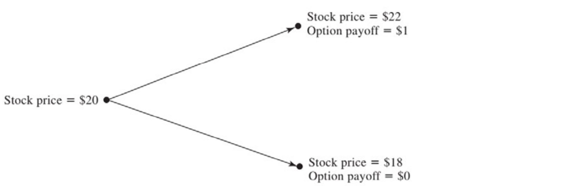
Évaluation par duplication

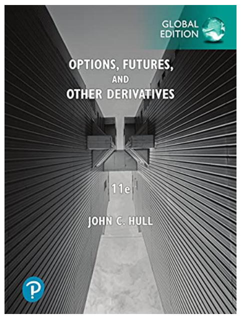


- Dans l'exemple précédent, on s'intéresse à la duplication du paiement d'une option d'achat à partir de l'actif sous-jacent et de l'actif sans risque.
- De même dans l'ouvrage très pédagogique sur les produits dérivés de Hull

Binomial Trees 289

Figure 13.1 Stock price movements for numerical example in Section 13.1.

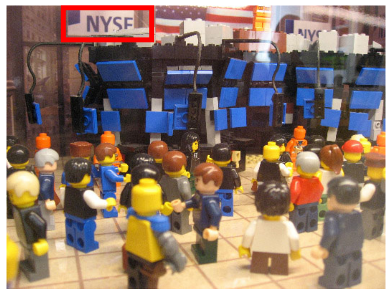




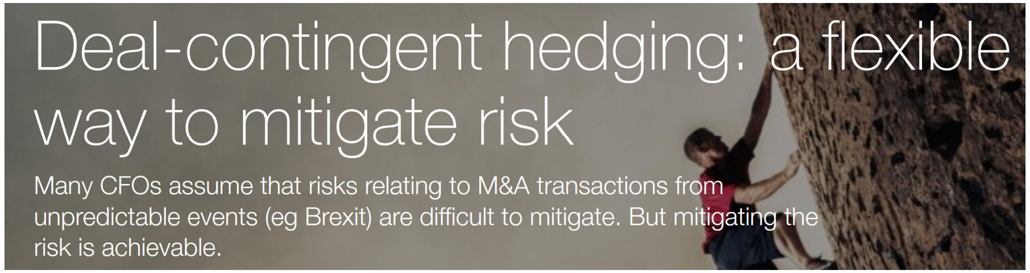
Évaluation par duplication

- Tout produit financier peut être vu comme un portefeuille ou un assemblage d'actifs contingents
  - *Actifs contingents : briques à partir desquelles on construits des produits dérivés, des produits financiers structurés*

→



- *Parallèle avec la physique des particules élémentaires*
  - Plusieurs niveaux de désagrégation : atomes, protons, quarks



- You can use deal-contingent hedging in M&A situations to cost effectively manage FX and interest rate risks.
- A deal-contingent hedge combines the best aspects of a standard FX forward and an FX option: it requires no payment upfront, locks in a forward rate, and disappears if the M&A fails.
- Deal-contingent interest rate hedging is also popular given the growing prospect of US rate rises and increasing bond yields.

Identification des scénarios

- Contingence : selon Aristote, ce qui s'oppose à nécessaire
- Nécessaire : ce qui ne peut être autrement
- Dans un monde où tout peut être parfaitement prévu (déterminisme de Laplace), il n'y a pas de contingence, tout est nécessaire
- Mais dans la gestion des affaires, il est utile d'envisager différents scénarios et d'avoir des stratégies de gestion adaptées aux différents scénarios

NOMURA

- La contingence, l'aléatoire, le hasard sont consubstantiels à une bonne gestion des affaires et des risques.

Identification des états de la nature ?

- Cas simple où on ne s'intéresse qu'à un actif financier, disons une action
  - *Le prix d'une action demain sera un multiple du « tick-size » (échelon de cotation)*
  - *L'unité est le tick size*
- S'il y a un carnet d'ordres et s'il y a suffisamment d'ordres limites, tout nouvel ordre s'exécutera au tick le plus proche, puis le suivant, etc. du fait de la priorité par les prix
  - *On ne peut sauter que d'un tick à la hausse ou à la baisse*
  - *Changements de prix : suite binaire* 100011 … *où* 1 *est associé à hausse d'un tick et* 0 *baisse d'un tick*

Identification des états de la nature ?

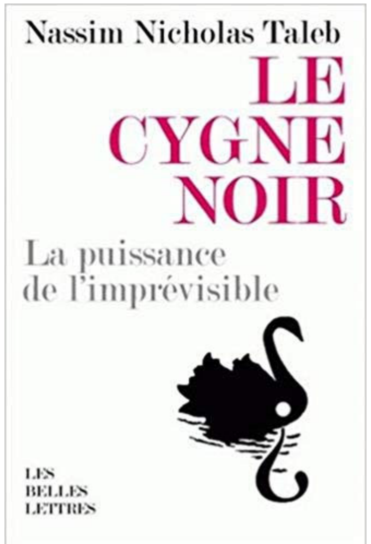
- Un modèle de microstructure va chercher à représenter de manière probabiliste la date d'arrivée du prochain saut à la hausse ou à la baisse
  - N_t^h *processus à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *donnant le nombre de sauts à la hausse à la date* t.
  - N_t^b *nombre de sauts à la baisse à la date* t
  - *Variation du prix entre* t_0 *et* t $N_t^h - N_{t_0}^h - \left(N_t^b - N_{t_0}^b\right)$
  - *Un raisonnement purement inductif et l'analyse institutionnelle nous conduit à dire qu'il n'y a que deux prix états futurs possibles*
  - *Mais, il se pourrait néanmoins que l'on observe un jour une suite* 1000112 *(le prix saute de deux ticks)*

Identification des états de la nature

- Se limiter à deux états de la nature revient à ignorer des événements rares (et difficilement quantifiables).
  - *Un ordinateur ne connaît pas ces éléments de contexte*
  - *Si on lui demande de traiter des suite binaires* 0100010101 …
  - *Une extrapolation de la suite précédente doit nécessairement se limiter à un choix dans* $\{0,1\}$
- Celui qui programme l'ordinateur fait un choix de modélisation
  - *L'absence passée d'un saut de deux ticks ne garantit pas une absence future.*
  - *On nous présente la série de cours boursiers précédente*
  - *Nous la faisons rentrer dans la catégorie « cours boursiers »*

Identification des états de la nature

- La série présentée hérite des propriétés de la catégorie
  - *Doit-on considérer que cette catégorie se limite à des variations d'un tick ?*
- Ces processus inductifs de catégorisation sont rapides et automatiques : « système 1 » de Daniel Kahneman.
  - *Ils se traduisent également dans le langage :*
    - On voit un cygne blanc. On dit « **Le cygne est blanc** » (constatation)
    - On voit beaucoup de cygnes blancs (et jamais de noir)
    - « **Le cygne est blanc** » devient un attribut du cygne (propriété générale)
    - L'apparition d'un **cygne noir** (krach) est un « unknown unknown » : état de la nature qui n'avait pas été considéré, dont on n'avait pas conscience qu'il avait été négligé



Identification des états de la nature

- Le cas des taux d'intérêt négatifs
- Pendant longtemps, on a considéré que les taux nominaux ne pouvaient être négatifs
  - *Quelques contre-exemples : taxe sur les dépôts non résidents en francs suisses*
  - *Un taux d'intérêt négatif sur les dépôts à vue impliquerait un arbitrage vers les espèces*
    - Malgré les limites à stocker, payer en espèces ou retirer des espèces
  - *D'où l'utilisation de modèles log-normaux pour les taux*
  - *Un « put » (floor) sur taux avec un prix d'exercice nul aurait donc dû avoir une prime nulle*

Identification des états de la nature

- Modification des politiques monétaires des banques centrales, notamment la BCE
  - *Prêts aux banques (MRO – Main Refinancing Operations), rémunération des réserves à taux négatif*
  - *Achat de dettes d'état et d'entreprise sur le marché secondaire (quantitative easing)*
  - *Beaucoup de taux interbancaires et d'obligations négatifs.*
  - *Primes de floors positives*
  - *Plus de borne inférieure naturelle en zéro*
  - *Distributions de probabilité des taux d'intérêt associées aux pricers et aux modèles de risque : soit les taux ne sont pas bornés inférieurement, soit on introduit une barrière qui a un caractère plus ou moins arbitraire (et peut être modifiée)*

Identification des états de la nature

- Dans l'exemple précédent, on peut considérer des valeurs négatives des taux d'intérêt
- Mais va-t-on leur associer une probabilité nulle ou strictement positive ?
  - *Probabilité nulle avec un espace d'état fini : impossibilité*
    - Ce n'est pas vrai dans le cas continu : si on considère une loi uniforme sur [0,1], la probabilité d'obtenir une valeur disons égale à 0,1 est nulle. Mais pour ce tirage n'est pas exclu pour autant.
- Supposons notre espace d'événements élémentaires $\{0,1,\dots,S\}$ doté d'une probabilité « objective »
  - *L'existence de cette mesure de probabilité objective est <u>postulée</u> (c'est un axiome dans l'approche standard de Kolmogorov.*

Identification des états de la nature

- $p_0,\dots,p_S$: probabilités d'être dans les états $0,1,\dots,S$
- Version simple de l'absence d'opportunité d'arbitrage : $p_s > 0 \Rightarrow q_s > 0$. En effet, $q_s = 0$ correspondrait à un ticket de loto gratuit
- Et la réciproque $q_s > 0 \Rightarrow p_s > 0$: $p_s = 0$ correspond à un événement impossible et personne ne souhaiterait payer pour s'assurer contre un événement impossible
- $P \sim Q$. Les deux mesures sont équivalentes : elles ont les mêmes ensembles de mesure positive et de mesure nulle
- La mesure de probabilité risque-neutre Q est observable (contrairement à P).
- Son « objectivité » (sa rationalité) est celle du marché financier (et non pas des acteurs de marché)

Butterfly et actif contingent

Actifs contingents : valeurs discrètes de l'actif sous-jacent

- Exemple : actif sous-jacent pouvant prendre les valeurs 0,1,2,3,4,5
- Actif contingent à l'état 3 représenté par un vecteur
- $\tilde{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $V_0 = V_1 = V_2 = 0, V_3 = 1, V_4 = V_5 = 0,$

État de la nature (microéconomie)
⇔ Scénario (finance)
⇔ Événement élémentaire : probabilités

Actifs contingents aux états (futurs) de la nature

- Considérons des options d'achat de prix d'exercice 0,1,2, … , 4
- $\tilde{S} = \left(\tilde{S} - 0\right)^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$: actif sous-jacent ⇔ option de strike 0
- $\left(\tilde{S} - 1\right)^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \left(\tilde{S} - 2\right)^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \dots, \left(\tilde{S} - 4\right)^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\alpha_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $V_0 = \alpha_0 = 0$ (à partir de la première ligne)
- $V_1 = \alpha_0 + \alpha_1 \times 1 = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = 0$
- $V_2 = \alpha_0 + \alpha_1 \times 2 + \alpha_2 \times 1 = 0 \Longrightarrow \alpha_2 = 0$
- $V_3 = \alpha_0 + \alpha_1 \times 3 + \alpha_2 \times 2 + \alpha_3 \times 1 = 1 \Longrightarrow \alpha_3 = 1$
- $V_4 = \alpha_0 + \alpha_1 \times 4 + \alpha_2 \times 3 + \alpha_3 \times 2 + \alpha_4 \times 1 = 0 \Longrightarrow \alpha_4 = -2$
- $V_5 = \alpha_0 + \alpha_1 \times 5 + \alpha_2 \times 4 + \alpha_3 \times 3 + \alpha_4 \times 2 + \alpha_5 \times 1 = 0 \Longrightarrow \alpha_5 = -3\alpha_3 - 2\alpha_4 = 1$
- $\alpha_0 = \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -2, \alpha_4 = 1, \alpha_5 = 0$

Actifs contingents aux états (futurs) de la nature

- $\Omega = \{\omega_0, \dots, \omega_S\}$: Espace des états (futurs) de la nature. $S \in \mathbb{N}$
- $\tilde{V} = \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_{S-1} \\ V_S \end{pmatrix}$ vecteur (ou variable aléatoire) associé à un portefeuille de titres, de produits structurés
  - $V_1, \dots, V_S \in \mathbb{R}$, $\tilde{V} \in \mathbb{R}^{S+1}$
  - *V_s est le paiement dans l'état s, exprimé dans une unité de compte donnée, par exemple euro ou dollar*

Actifs contingents aux états (futurs) de la nature

- On va considérer un actif sous-jacent (prix positif) et des options d'achat sur cet actif, de prix d'exercice $0,1,2,\ldots,S-1$
- $\tilde{S} = (\tilde{S}-0)^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ S-1 \\ S \end{pmatrix}$: l'actif sous-jacent est une option de strike 0
- $(\tilde{S}-1)^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ S-2 \\ S-1 \end{pmatrix}, (\tilde{S}-2)^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ S-2 \end{pmatrix}, \ldots, (\tilde{S}-(S-1))^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Actifs contingents aux états (futurs) de la nature

- $A_F = \begin{pmatrix} 1+r_f \\ 1+r_f \\ \vdots \\ 1+r_f \end{pmatrix}$, vecteur de paiement associé à l'actif sans risque
- $M = \left(A_F, \tilde{S}, (\tilde{S}-1)^+, \ldots, (\tilde{S}-(K-1))^+\right)$
- M matrice carrée $(S+1)\times(S+1)$triangulaire inférieure.
  - *Les éléments diagonaux sont non nuls,*
  - *Son déterminant également (car produit des éléments diagonaux)*
  - $det(M) = 1 + r_f$
- M est inversible (ou de rang plein): $\exists M^{-1}$ tel que $M \times M^{-1} = M^{-1} \times M = Id_{S+1}$

Actifs contingents aux états (futurs) de la nature

- *Cas avec $S+1=6$ états de la nature*
- $M = \begin{pmatrix} 1+r_f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1+r_f & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1+r_f & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1+r_f & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1+r_f & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1+r_f & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
- $\det(M) = 1 + r_f > 0$

Duplication (statique) à partir d'options.

- Portefeuille constitué à partir des actifs
  - $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_S \in \mathbb{R}$
  - $\alpha_0 \times A_F + \alpha_1 \times \tilde{S} + \cdots + \alpha_S \times (\tilde{S}-(S-1))^+ = \left(A_F, \tilde{S}, (\tilde{S}-1)^+, \ldots, (\tilde{S}-(S-1))^+\right) \times \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_S \end{pmatrix} = M \times \alpha$
    - $\alpha_0 A_F$ correspond au vecteur de paiements associé à α_0 unités d'actif sans risque, $\alpha_1 \tilde{S}$ correpond à l'achat de α_1 actions, etc.
    - La première égalité s'obtient en développant le terme de droite
- Trouver $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_S \end{pmatrix}$ tel que $M \times \alpha = \tilde{V}$: $\alpha = M^{-1} \times \tilde{V}$

Duplication (statique) à partir d'options.

- On peut obtenir les α_s, $s \in \{0,1,\ldots,S\}$ de manière itérative
  - $V_0 = \alpha_0 \times (1 + r_f) \Longrightarrow \alpha_0 = \frac{V_0}{1+r_f}$
  - $V_1 = \alpha_0 \times (1 + r_f) + \alpha_1 \times 1$ *(car $S_1 = 1$)*
    - Connaissant déjà α_0, on en déduit α_1
  - $V_2 = \alpha_0 \times (1 + r_f) + \alpha_1 \times 2 + \alpha_2 \times 1$
    - Connaissant déjà α_0 et α_1, on en déduit α_2
- S'il y a au moins $S + 1$ actifs, tels que la matrice des paiements associés à ces actifs, M est inversible, alors on peut dupliquer tout vecteur de paiement futur $\tilde{V}$ (produit structuré) à partir de ces actifs.
  - *Le prix (aujourd'hui) de $\tilde{V}$ est le coût de constitution du portefeuille dupliquant (en l'absence d'opportunités d'arbitrage)*

Actifs contingents : cas avec $S + 1 \in \mathbb{N}$ états

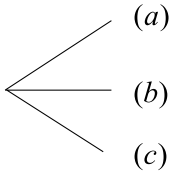
- $e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ *$e_0, \ldots, e_S$, vecteurs de paiement associés aux actifs contingents aux états de la nature*
- *$(e_0, \ldots, e_S)$ base canonique de $\mathbb{R}^{S+1}$*
- $M = (e_0 e_1 e_2 e_3 \ldots e_S) = Id_{S+1}.\, Id_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $M \times \alpha = Id_{S+1} \times \alpha = \tilde{V} \Longrightarrow \alpha = \tilde{V}$

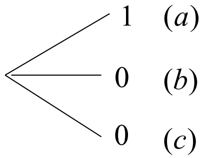
Actifs contingents

- $\tilde{V} = \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_{S-1} \\ V_S \end{pmatrix} = V_0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + V_1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + V_S \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\tilde{V} = V_0 \times e_0 + V_1 \times e_1 + \cdots + V_S \times e_S$
- Tout vecteur de paiements (futurs) s'écrit immédiatement comme une combinaison linéaire d'actifs contingents
- C'est un portefeuille d'actifs contingents
- Il est plus simple d'utiliser les actifs contingents, même s'il est plus courant de traiter des calls et des puts sur les marchés
  - *Bourse de Paris, au 19e siècle : stellages (strangles)*
  - *Aujourd'hui, calls vendus avec leur couverture*

Actifs contingents

- Arbre des états de la nature et actifs contingents
  - *Deux dates : aujourd'hui et demain*
  - *Arbre des états de la nature :*
  - *Ici, 3 états de la nature, notés (a), (b), (c)*
  - *On sait à la date future quel état se réalise*
  - *Actif contingent à la réalisation de l'état (a)*

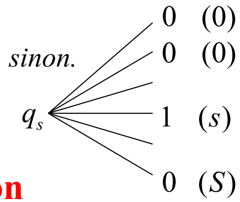




- Le risque est lié à la méconnaissance aujourd'hui de l'état futur.
- Un actif contingent transfère de la richesse entre aujourd'hui et demain
  - *Conditionnellement à la réalisation d'un état (ici l'état (a))*

Prix d'actifs contingents et probabilités risque-neutre

- Notons q_s le prix aujourd'hui d'un actif contingent à l'état s
  - *Paye* 1 *si l'état s se réalise et* 0 *sinon.*



- **Évaluation par duplication**
  - ***Produit financier*** *qui paye à son détenteur V_1 si l'état* 1 *se réalise, …, V_S si l'état S se réalise.*
    - Produit financier : assemblage ou portefeuille d'actifs contingents.
  - *Peut être dupliqué par la détention de V_1 unités d'actif contingent à l'état* 1*, …, V_S unités d'actif contingent à l'état S*
  - ***Coût de duplication*** *: Montant de l'investissement pour constituer le portefeuille dupliquant, soit $\sum_{s=0}^{S} q_s V_s$*

Taux sans risque, probabilité risque neutre

- Taux sans risque r_f
  - *Un investissement de* 1 *aujourd'hui dans l'actif sans risque rapporte $1 + r_f$ dans tous les états de la nature*
  - $V_0 = V_1 = \cdots = V_S = 1 + r_f$
  - *Prix de l'actif sans risque* $= 1$
  - $\Rightarrow 1 = \sum_{s=0}^{S} q_s \times (1 + r_f) = (1 + r_f) \times \sum_{s=0}^{S} q_s$
  - $\Rightarrow \sum_{s=0}^{S} q_s = \frac{1}{1+r_f}$
  - *Remarque : si on a $S + 1$ états, les payoffs des calls engendrent un espace vectoriel de dimension $S + 1$*
    - On a $S + 1$ vecteurs linéairement indépendants
  - *L'actif sans risque permet de « compléter » le marché, c'est-à-dire d'avoir une base de $\mathbb{R}^{S+1}$*

Taux sans risque, probabilité risque neutre

- Remarque : $\forall s = 0, \dots, S, q_s \geq 0$
  - *Sinon opportunité d'arbitrage*
  - *Posons* $\tilde{q}_s = (1 + r_f) \times q_s$
  - $\forall s = 0, \dots, S, \tilde{q}_s \geq 0,$
  - $\sum_{s=0}^{S} \tilde{q}_s = (1 + r_f) \sum_{s=0}^{S} q_s = \frac{1+r_f}{1+r_f} = 1$
  - *$\tilde{q}_s$: probabilité « risque-neutre » implicitée par le marché associée à l'état s*
- Valeur aujourd'hui :
- $\sum_{s=0}^{S} q_s V_s = \frac{1}{1+r_f} \sum_{s=0}^{S} \tilde{q}_s V_s = \frac{1}{1+r_f} E^Q[\tilde{V}]$
  - *Où Q est la probabilité risque-neutre (définie sur $(\Omega, P(\Omega))$*
  - *$\tilde{V}$: variable aléatoire, prenant les valeurs $V_0, \dots, V_S$*

Option digitale (binary option) et probabilité risque-neutre

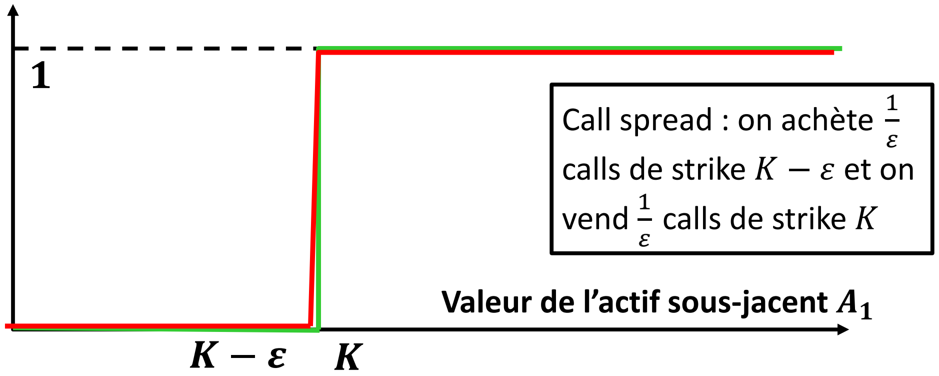
- Un call digital a un paiement à l'échéance égal à 1 si $A_1 > K$ où K est le prix d'exercice. Si $A_1 \leq K$ le paiement est nul.
- On notera $C_b(K)$ la prime de cette option
- $C_b(K) = \frac{1}{1+r_f} E^Q[1_{A_1>K}]$, où Q est la probabilité dite « risque-neutre » et r_f le taux sans risque
  - *Pour une option d'achat* $C(K) = \frac{1}{1+r_f} E^Q[(A_1 - K)^+]$
- Considérons le paiement $1_{A_1 \geq K} = 1_{A_1>K} + 1_{A_1=K}$
- On notera $\overline{C}_b(K)$ la prime de cette option
- $\bar{C}_b(K) = C_b(K) + \frac{1}{1+r_f} Q(A_1 = K)$
  - $\bar{C}_b(K) = C_b(K)$ *s'il n'y a pas de masse de probabilité en* K

Option digitale (binary option) : rappels de probabilités

- $E^Q[1_{A_1>K}] = Q(A_1 > K) \times 1 + \left(1 - Q(A_1 > K)\right) \times 0 = Q(A_1 > K) = S(K)$
- Fonction de répartition de A_1 ?
- $x \to F(x) = Q(A_1 \leq x)$ définition
- $x \to S(x) = Q(A_1 > x) = 1 - F(x)$ fonction de survie
- A quel paiement futur correspond la fonction de répartition ?
- $F(K) = Q(A_1 \leq K) = E^Q[1_{A_1 \leq K}]$

Option digitale (binary option) et probabilité risque-neutre

- Profils de risque du call digital et du call spread



  - *Si* $A_1 \geq K$ *et* $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{\varepsilon} \times \left(\left(A_1 - (K - \varepsilon)\right)^+ - (A_1 - K)^+\right) = 1$
  - *Paiement du call spread ≥ à celui du call digital et converge simplement vers* $1_{A_1 \geq K}$: $\frac{1}{\varepsilon} \times \left(\left(A_1 - (K - \varepsilon)\right)^+ - (A_1 - K)^+\right) \to 1_{A_1 \geq K}$

Option digitale (binary option) et probabilité risque-neutre

- $\frac{1}{\varepsilon} \times \left(\left(A_1 - (K - \varepsilon)\right)^+ - (A_1 - K)^+\right) \to 1_{A_1 \geq K}$ convergence des profils de paiement
- Prenons les espérances (sous probabilité risque-neutre). Par linéarité des espérances
- $E^Q\left[\frac{1}{\varepsilon} \times \left(\left(A_1 - (K - \varepsilon)\right)^+ - (A_1 - K)^+\right)\right] = \frac{1}{\varepsilon} \times \left(E^Q\left[\left(A_1 - (K - \varepsilon)\right)^+\right] - E^Q\left[(A_1 - K)^+\right]\right)$
- $E^Q\left[\left(A_1 - (K - \varepsilon)\right)^+\right] = (1 + r_f) \times C(K - \varepsilon)$
- $E^Q[(A_1 - K)^+] = (1 + r_f) \times C(K)$
- $\frac{1}{\varepsilon} \times E^Q\left[\left(\left(A_1 - (K - \varepsilon)\right)^+ - (A_1 - K)^+\right)\right]$
- $= (1 + r_f) \times \frac{1}{\varepsilon} \times \left(C(K - \varepsilon) - C(K)\right) \to (1 + r_f) \times \overline{C}_b(K)$

Option digitale (binary option)

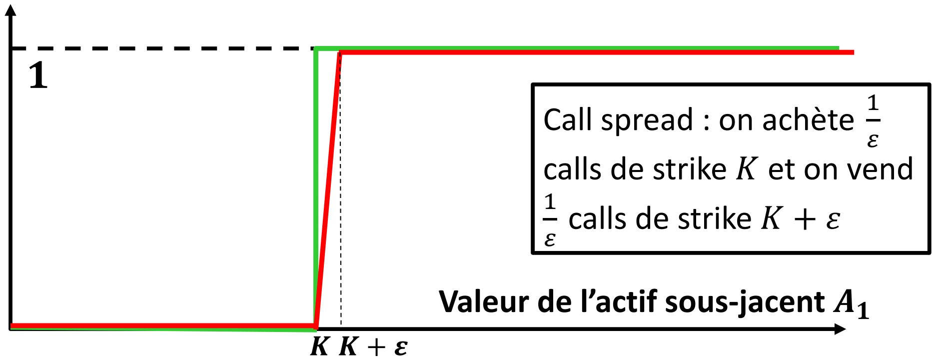
- Si $K \to C(K)$ est dérivable en K, alors $\frac{1}{\varepsilon} \times \left(C(K-\varepsilon) - C(K)\right) \to -C'(K)$ quand $\varepsilon \to 0$
- Conclusion : $\overline{C}_b(K) = -C'(K)$
- Le prix du call digital est alors égal à l'opposé de la dérivée de la prime du call (normal) par rapport au strike
- Comme $C'(K) \leq 0$ (prime du call en fonction du strike décroissante), $\overline{C}_b(K)$ est bien positif

Option digitale (binary option)

- *Théorème de convergence dominée ou monotone*
- $\lim_{\varepsilon \to 0^+} -\frac{C(K-\varepsilon)-C(K)}{-\varepsilon}$ *existe et est égale à* $\bar{C}_b(K) = \frac{Q(A_1 \geq K)}{1+r_f}$
  - $\frac{C(K-\varepsilon)-C(K)}{\varepsilon}$ prime du call spread digital associé au paiement en rouge
- $K \to C(K)$ *est dérivable à gauche, de dérivée* $-\bar{C}_b(K)$
- Approchons le paiement du call digital par en-dessous
  - **Illustration graphique : voir transparent suivant**
- *Soit* ε, $\varepsilon > 0$ *et le portefeuille constitué par l'achat de* $1/\varepsilon$ *call de strike* K *et la vente de* $1/\varepsilon$ *call de strike* $K + \varepsilon$
- *Payoff :* $\frac{1}{\varepsilon} \times \left((A_1 - K)^+ - \left(A_1 - (K+\varepsilon)\right)^+\right)$
- $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \times \left((A_1 - K)^+ - \left(A_1 - (K+\varepsilon)\right)^+\right) = 1_{A_1 > K}$
- $\varepsilon \to 0$ *: paiement du call spread tend simplement vers* $1_{A_1 > K}$

Option digitale (binary option)

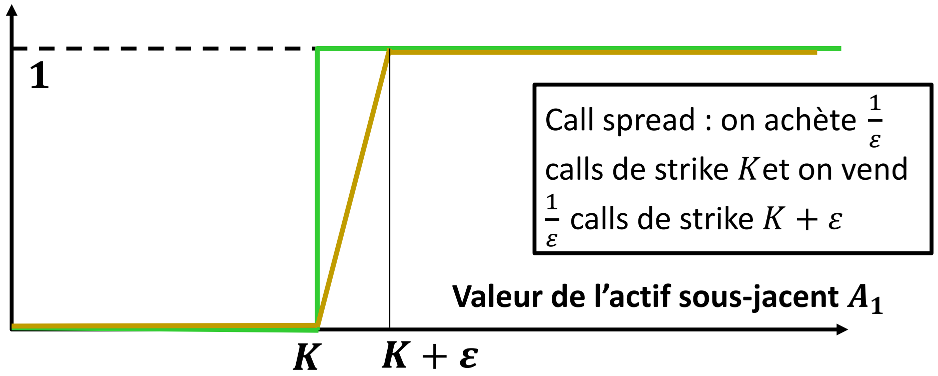
- Profils de risque du call digital et du call spread



- *Le paiement du call spread est supérieur ou égal à celui du call digital et converge simplement vers* $1_{A_1 > K}$
- $\frac{1}{\varepsilon} \times \left((A_1 - K)^+ - \left(A_1 - (K+\varepsilon)\right)^+\right) \to 1_{A_1 > K}$

Option digitale

- Profils de risque du call digital et du call spread



- $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{C(K)-C(K+\varepsilon)}{\varepsilon} = C_b(K)$
- $K \to C(K)$ *est dérivable à droite, de dérivée* $-C_b(K)$

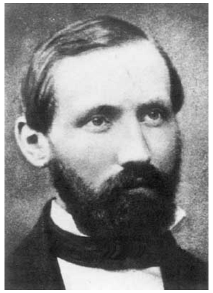
Option digitale et probabilité risque-neutre

- Par le même raisonnement que précédemment,
- $K \to C(K)$ est dérivable à droite, de dérivée $-C_b(K) = -\frac{Q(A_1 > K)}{1+r_f}$
- Si $K \to C(K)$ est dérivable
  - *Alors* $K \to C(K)$ *est dérivable à gauche et à droite et les deux dérivées sont égales*
- $C'(K) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{C(K+\varepsilon) - C(K)}{\varepsilon} = -\frac{Q(A_1 \geq K)}{1+r_f} = -\frac{Q(A_1 > K)}{1+r_f}$
  - *Et* $Q(A_1 = K) = 0$
- Attention aux risques de manipulation du sous-jacent dans le cas d'options digitales.

Option digitale et probabilité risque-neutre

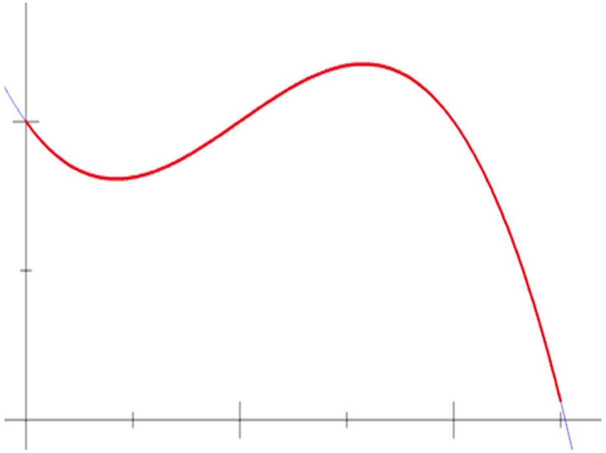
- Récapitulons (sans hypothèse de dérivabilité) :
  - $\lim_{\varepsilon \to 0^+} -\frac{C(K-\varepsilon) - C(K)}{-\varepsilon} = \bar{C}_b(K) = \frac{Q(A_1 \geq K)}{1+r_f}$ *fonction décroissante de K*
  - $\lim_{\varepsilon \to 0^+} -\frac{C(K+\varepsilon) - C(K)}{\varepsilon} = C_b(K) = \frac{Q(A_1 > K)}{1+r_f}$ *fonction décroissante de K*
  - $\frac{Q(A_1 = K)}{1+r_f} = \bar{C}_b(K) - C_b(K)$

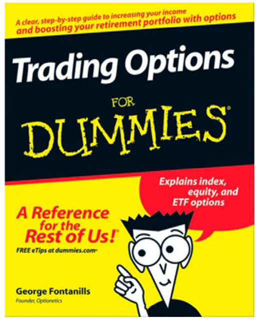
Cas continu : évaluation de la densité de probabilité risque-neutre



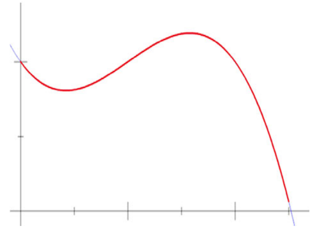
Bernhard Riemann

On peut approcher un profil de paiement général par un portefeuille d'option digitales

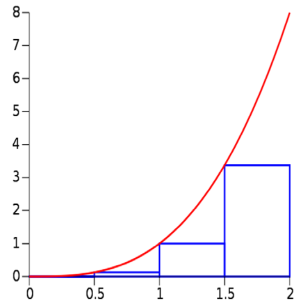




Profils de paiement généraux

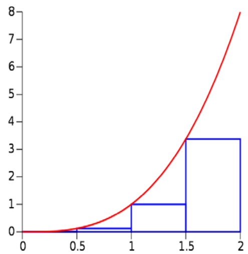


- On considère un profil de paiement général g
  - *À l'échéance, l'acheteur de l'option exotique reçoit $g(A_1)$ où g est une fonction continue*
  - *On va considérer une subdivision de l'ensemble des valeurs possibles prises par l'actif sous-jacent $0, K_1, K_2, \ldots, K_n$*
  - *On peut approximer la fonction g par une* ***fonction en escalier*** *prenant la valeur $g(K_i)$ sur l'intervalle $[K_i, K_{i+1}[$*
  - *Voir graphique ci-contre*



Profils de paiement généraux

- Approximation du profil de paiement général par une fonction en escalier
  - *Prix du portefeuille d'options digitales*
  - $\sum_i g(K_i) \times \left(C_b(K_i) - C_b(K_{i+1})\right)$
  - *En faisant un développement limité et en supposant que $K \to C_b(K)$ continûment dérivable*
  - $C_b(K_i) - C_b(K_{i+1}) \simeq C'_b(K_i) \times (K_i - K_{i+1})$
- On obtient la somme de Riemann
  - $\sum_i g(K_i) \times \left(C'_b(K_i) \times (K_i - K_{i+1})\right) = -\sum_i g(K_i) \times C'_b(K_i)(K_{i+1} - K_i)$
  - *Quand le pas de la subdivision $K_{i+1} - K_i$ tend vers 0, converge vers* $-\int g(K) C'_b(K) dK$



Profils de paiement généraux

- La prime associée à un profil de paiement général peut se calculer à partir des primes des options digitales $C'_b(K)$
- Un profil de paiement général est la limite d'une suite de paiements associés à des fonctions en escalier
- On peut dupliquer le paiement général précédent par un portefeuille d'options digitales
  - *On parle de duplication (« replication ») statique.*
  - *Comme $C_b(K) = -C'(K)$, $C'_b(K) = -d^2C(K)/dK^2$*
- La prime associée au profil de paiement $g(A_1)$ est donnée par $\int_0^\infty g(K) \frac{d^2C(K)}{dK^2} dK$
  - *La primes des calls $C(K)$ déterminent les primes associés à des profils de paiement généraux*

Profils de paiement généraux

- Propriété (Breeden et Litzenberger) : La prime associée au profil de paiement $g(A_1)$ est donnée par $\int_0^\infty g(K)\frac{d^2C(K)}{dK^2}dK$

Douglas Breeden

Bob Litzenberger

- Dans le cas d'espace d'état continu, $K \to (1+r)\frac{d^2C(K)}{dK^2}$ est la fonction de densité associée à la probabilité risque neutre

Profils de paiement généraux

- Notons π, la fonction qui à un profil de paiement g, associe sa prime $\pi(g)$
- $\pi(g) = \int_0^\infty g(K)\frac{d^2C(K)}{dK^2}dK$
- Par ailleurs $\pi(g) = \frac{1}{1+r}E^Q[g] = \frac{1}{1+r}\int_0^\infty f(K)g(K)dK$
  - *Où f est la fonction de densité de la mesure de probabilité Q*
  - *Par identification, on obtient $f(K) = (1+r)\frac{d^2C(K)}{dK^2}$*
  - *Remarque : comme $K \to C(K)$ est convexe, $\frac{d^2C(K)}{dK^2} \geq 0$*
  - *Remarque : $\frac{d^2C(K)}{dK^2} \approx \frac{C(K+dK)-2C(K)+C(K-dK)}{(dK)^2}$ correspondant à une prime de butterfly.*

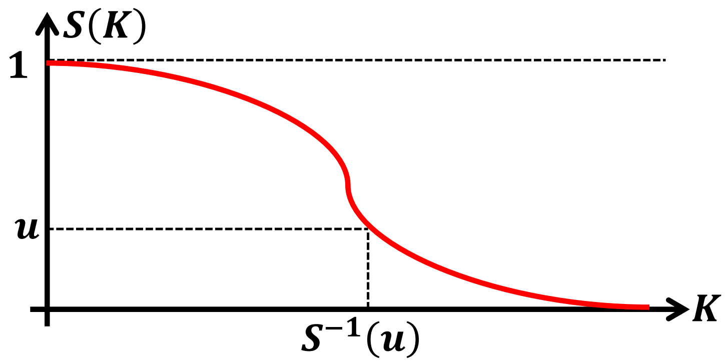
John Maynard Keynes (1883–1946)

Options digitales et probabilités

- Option digitale de strike nul
  - *Rapporte 1 si l'actif sous-jacent a une valeur positive ou nulle à l'échéance $A_1 \geq 0$*
  - *Ce qui est toujours vrai (pour un actif)*
  - *C'est un zéro-coupon*
  - *Valeur à la date initiale $C_b(0) = 1/(1+r_f)$ où r est le taux sans risque*
- Notons $S(K) = (1+r_f) \times C_b(K)$
- La fonction $K \in \mathbb{R}^+ \to S(K) \in \mathbb{R}^+$ est décroissante
  - $\lim_{K\to\infty} S(K)$ *existe*
  - *Supposons que* $\lim_{K\to\infty} S(K) = 0$
  - *« trees don't grow to the sky » (Keynes)*

Options digitales et probabilités

- Supposons $K \to S(K)$ strictement décroissante et continue



- Pour $u \in [0,1[$, on peut définir $\boldsymbol{S^{-1}(u)}$ par $\boldsymbol{S(S^{-1}(u)) = u}$
  - $\boldsymbol{S^{-1}}$ *fonction réciproque de* $\boldsymbol{S}$

Options digitales et probabilités

- Soit U une variable aléatoire distribuée uniformément sur l'intervalle $[0,1]$
  - *Peut être simulée par la fonction alea d'Excel*
  - *La probabilité que U soit inférieure à un seuil* $u \in [0,1]$ *est donnée par* $P(U < u) = u$
  - *Par exemple, la probabilité que U soit inférieur à* $0{,}5$ *est* $1/2$
- Définissons la variable aléatoire $A_1 = S^{-1}(U)$
- $A_1 > K \Leftrightarrow S^{-1}(U) > K \Leftrightarrow S\big(S^{-1}(U)\big) < S(K)$
  - *Car S est décroissante. De plus* $S\big(S^{-1}(U)\big) = U$
- La probabilité que A_1 soit supérieur à un seuil $K \in \mathbb{R}^+$ est donnée par $Q(A_1 > K) = Q\big(U < S(K)\big) = S(K)$

Options digitales et probabilités

- Récapitulons les résultats obtenus
  - *Prime de l'option digitale :* $C_b(K) = \frac{1}{1+r_f} \times S(K)$
    - r_f : taux d'intérêt sans risque entre date courante et date d'exercice
  - $S(K) = Q(A_1 > K)$
  - $C_b(K) = \frac{1}{1+r_f} \times Q(A_1 > K)$
  - *Pour une variable aléatoire* A_1, *la fonction* $K \rightarrow S(K) = Q(A_1 > K)$ *est appelée fonction de survie*
    - $K \rightarrow Q(A_1 \leq K) = 1 - S(K)$: fonction de répartition
  - $(1+r)C_b(K)$ *peut s'interpréter comme la probabilité que l'option digitale soit exercée*
  - *Ces probabilités dérivées des primes d'options sont dites « risque-neutres ».*

Marchés incomplets

- Soit $m \in \mathbb{N}$ produits traités sur les marchés financiers
  - *Il peut s'agir de l'actif sans risque, d'un actif sous-jacent, d'options d'achat ou de vente sur cet actif-sous-jacent*
  - *On suppose qu'il n'y aucune friction sur les marchés*
- Comme précédemment $S + 1$ états de la nature
- Soit $k \in \{1, \dots, m\}$.
- On note $H_k \in \mathbb{R}^{S+1}$, le vecteur de $\mathbb{R}^{S+1}$ associé aux paiements futurs du produit financier k
  - $H_k = (h_{k1}, \dots, h_{kS+1})$, *(représentation avec matrice ligne)*
  - h_{ki}*: flux payé par le produit k à la date future dans l'état i*
- $P_k \in \mathbb{R}$: prix payé à la date courante pour acquérir le produit financier k

Marchés incomplets

- Pour $\alpha_k \in \mathbb{R}$ unités de produit $k \in \{1, \dots, m\}$ achetées, les flux futurs sont égaux à :
  - $\alpha_k H_k = \alpha_k \times (h_{k1}, \dots, h_{kS+1})$
- Et le prix d'acquisition à la date courante est $\alpha_k P_k$
- Pour un portefeuille constitué de α_1 unités de produit 1, …, α_m unités de produit m, les flux futurs sont égaux à $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k H_k$
- Et le prix d'acquisition en $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k P_k$
- On notera H, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{S+1}$ engendré par les vecteurs $H_1, \dots, H_m$
- H : espace des vecteurs de paiement atteignables
  - $\dim H \leq \min(S + 1, m)$

Marchés incomplets et complets

- Si $\dim H < S + 1$, on dit que le marché des produits financiers est incomplet
  - *Cas notamment s'il y a moins de produits traités dans le marché que d'états de la nature*
- Si $\dim H = S + 1$, le marché est dit complet : $H = \mathbb{R}^{S+1}$
- Duplication des actifs contingents (Arrow-Debreu) e_i,
  - *Trouver* $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, *tels que* $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k H_k = e_i$, $i \in \{1, \dots, S + 1\}$ *?*
  - *Système de n équations linéaires à m inconnues* $\alpha_1, \dots, \alpha_m$
- Prix de duplication de l'actif contingent e_i : $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k P_k$
- Existence, unicité, positivité des prix des actifs contingents ?

Marchés incomplets et complets

- Dans la suite, on supposera que les vecteurs $H_1, \dots, H_m$ correspondant aux produits traités dans le marché financier sont linéairement indépendants
  - *Pas de redondance d'actifs*
  - *Les produits atteignables ont un unique prix de duplication*
- Si $m = S + 1$, $H_1, \dots, H_m$ forment une base de $\mathbb{R}^{S+1}$
  - *Autant de produits traités (linéairement indépendants) que d'état de la nature*
  - *Comme* $H = \mathbb{R}^{S+1}$, *tout produit financier est atteignable*
- $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k H_k = e_i$, $i \in \{1, \dots, S + 1\}$: système de Cramer
- Il existe un unique portefeuille de duplication et par conséquent un unique prix de duplication

Marchés incomplets et opportunité d'arbitrage

- Revenons maintenant au cas général $m \leq S+1$
- Opportunité d'arbitrage
  - *Cas statique*
- Définition : Opportunité d'arbitrage
  - *Produit financier associé aux flux futurs $V_1, \dots, V_{S+1}$ et de prix aujourd'hui P, tels que $\forall i = 1, \dots, S+1$, $V_i \geq 0$, $-P \geq 0$ et au moins une inégalité est stricte*
- On dit que les échéanciers $H_1, \dots, H_m$ de prix $P_1, \dots, P_m$ ne présentent pas d'opportunité d'arbitrage si tout échéancier de flux atteignable positif a un prix de duplication positif
- $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{m} \alpha_k H_k \geq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} \alpha_k P_k \geq 0$

Marchés incomplets : à laisser de côté

- Remarque technique sur la définition de l'AOA
  - *AOA : absence d'opportunité d'arbitrage*
  - *L'inégalité $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k H_k \geq 0$ est à prendre au sens de l'ordre partiel dans $\mathbb{R}^n$*
  - *Toutes les coordonnées du vecteur $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k H_k$ sont positives ou nulles*
  - *$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{m} \alpha_k H_k \geq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} \alpha_k P_k \geq 0$ est une implication de l'AOA*
    - Si AOA, la propriété précédente est vérifiée
    - Mais la propriété précédente n'implique pas l'AOA
    - $H_1 = e_1, P_1 = 0$ est une OA et vérifie la propriété précédente
    - Problème technique (sans conséquence)

Marchés incomplets : à laisser de côté

- Point technique à laisser de côté !
  - *Comment résoudre la difficulté précédente ?*
  - *Il suffit d'inclure le prix d'acquisition en t_0 dans le vecteur de paiement*
  - *On définit $\widetilde{H}_k = (-P_k, H_k) \in \mathbb{R}^{S+2}$, $k = 1, \dots, m$*
  - *$\widetilde{H}$ sous-espace de $\mathbb{R}^{S+2}$ engendré par les $\widetilde{H}_k$*
  - *Opportunité d'arbitrage :*
    - Échéancier atteignable : un élément de $\widetilde{H}$
    - À flux positifs ou nuls : appartenant à $(\mathbb{R}^+)^{S+2}$
    - Un flux au moins non nul : l'échéancier $\neq$ vecteur nul $(0, \dots, 0)$
    - Opportunité d'arbitrage un élément de $\widetilde{H} \cap \left((\mathbb{R}^+)^{S+2} \backslash (0, \dots, 0)\right)$
    - AOA $\Leftrightarrow \widetilde{H} \cap \left((\mathbb{R}^+)^{S+2} \backslash (0, \dots, 0)\right) = \emptyset$
    - $(\mathbb{R}^+)^{S+2} \backslash (0, \dots, 0)$: Orthant positif épointé de $\mathbb{R}^{n+1}$

Marchés incomplets et opportunité d'arbitrage

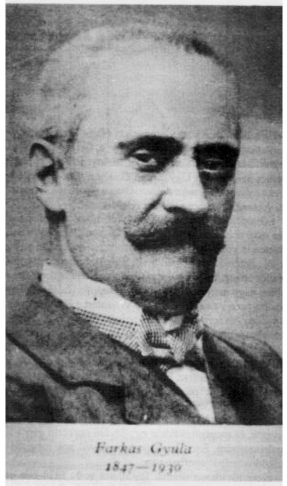
- Existence de prix Arrow-Debreu positifs ?
  - *Soit $V = (V_1, \dots, V_{S+1}) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k H_k \in H \subset \mathbb{R}^{S+1}$ un échéancier atteignable*
  - *V : échéancier associé à un portefeuille constitué des actifs traités sur le marché $H_1, \dots, H_m$*
  - *V_i flux payé dans l'état i, $i \in \{1, \dots, S+1\}$*
  - *Notons f_i l'application coordonnée, qui à chaque échéancier $V \in H$ associe le flux payé à la date t_i*
  - *$V \in H \rightarrow f_i(V) = V_i$*
    - e_i : échéancier associé au zéro-coupon de maturité t_i
    - f_i : forme linéaire définie sur H
  - *Notons p, l'application linéaire qui à chaque échéancier $V \in H$ associe son prix de duplication*
  - *$V \in H \rightarrow p(V) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k P_k$*
    - p : forme linéaire définie sur H

Marchés incomplets et opportunité d'arbitrage

- Énoncé du lemme de Farkas
- $\{\forall V \in H, f_1(V) \geq 0, \dots, f_{S+1}(V) \geq 0 \Rightarrow p(V) \geq 0\} \Leftrightarrow \exists q_1, \dots, q_{S+1} \in \mathbb{R}^+, p = \sum_{i=1}^{n} q_i V_i$
- La proposition de gauche peut se réécrire :
- $\forall V = (V_1, \dots, V_{S+1}) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k H_k, V_1 \geq 0, \dots, V_{S+1} \geq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} \alpha_k P_k \geq 0$
  - *Il s'agit d'une implication de l'absence d'opportunités d'arbitrage au sein des échéanciers atteignables*
- La proposition de droite peut se réécrire :
- $\exists q_1 \geq 0, \dots, q_{S+1} \geq 0, p(V) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k P_k = \sum_{i=1}^{S+1} q_i V_i$
- $q_1, \dots, q_{S+1}$ prix des actifs contingents associés aux états associés aux états $i \in \{1, \dots, S+1\}$

Marchés incomplets et opportunité d'arbitrage

- Le lemme de Farkas permet d'établir que l'absence d'opportunités d'arbitrage, implique l'existence de prix d' actifs contingents positifs
- Tels que les prix des produits financiers traités dans le marché s'écrivent comme l'espérance (actualisée) du payoff
  - $\sum_{i=1}^{S+1} q_i V_i$
- Il n'y a pas forcément unicité des prix des actifs contingents
- Les prix des actifs contingents peuvent être nuls …
  - *Avec la version utilisée du lemme de Farkas*



Farkas

Synthèse des résultats théoriques

- S'il existe un actif sans risque, avec la transformation $\tilde{q}_s = (1 + r_f) \times q_s$, les $\tilde{q}_s, s = 0,1, \dots, S$ forment un système de probabilités sur les états de la nature.
- H : espace vectoriel des produits financiers atteignables
- Si $H = \mathbb{R}^{S+1}$, tout produit financier est duplicable
- L'absence d'opportunité d'arbitrage implique l'existence de prix d'Arrow-Debreu positifs
  - *Ou d'une probabilité risque-neutre*
- Si $\dim H < S + 1$, le marché est incomplet
  - *Si AOA, il existe plusieurs probabilités risque-neutre*
  - *Unicité des prix de duplication pour les produits atteignables*
- $\dim H = S + 1$ et AOA, unique probabilité risque-neutre

Synthèse des résultats théoriques

- Ces résultats ont été établis dans le cas simple d'un espace d'états de dimension finie.
- Restent vrais pour l'essentiel pour des espaces d'état très généraux, à des complications techniques près
  - *Définition de l'espace des produits atteignables*
  - *Définition de l'AOA*
  - *Définition de la notion de probabilité risque-neutre*
  - *Utile par exemple pour la théorie de l'évaluation des options de Black et Scholes*
- Les propriétés AOA $\Rightarrow$ existence de Q probabilité risque-neutre et marché complet + AOA $\Rightarrow$ unicité de Q sont les deux propriétés importantes de la théorie des marchés de produits financiers dérivés

Synthèse des résultats théoriques

- Si l'ensemble des actifs traités est constitué de calls de strikes donnés, de l'actif sous-jacent, de l'actif sans risque
- Une condition nécessaire est suffisante pour qu'il y ait absence d'opportunité d'arbitrage est que :
  - *les prix des calls décroissent en fonction du strike*
  - *Les prix des calls soient une fonction convexe du strike*
- Le caractère nécessaire est prouvé dans les corrigés des exercices (call-spreads et butterfly)
- Le caractère suffisant est admis, mais la démonstration ne présente pas de difficulté particulière
  - *Comme vu dans les cas discret et continu, on peut relier primes de calls et probabilité risque-neutre*
  - *Unicité seulement si continuum de strikes*

Exercice 1 : existence de probabilités risque-neutre en marchés incomplets

- Soit un actif sous-jacent dont le prix à échéance est noté A_1
- On suppose que A_1 est une variable aléatoire positive prenant ses valeurs dans un ensemble fini ordonné de manière croissante $\{A_1^0, \dots, A_1^n\}$ $(0 \leq A_1^0 < A_1^1 < \cdots < A_1^n)$
  - *Les valeurs ne sont pas forcément équiréparties*
- On considère un ensemble de strikes fini et également ordonné $\{K_1 < \cdots < K_m\}$
- Il existe un actif sans risque de taux r_f
  - *On suppose que les prix des calls décroissent en fonction du strike*
  - *On suppose que les prix des calls soient une fonction convexe du strike*
  - *Plus e condition additionnelle à déterminer …*
- Montrer qu'il existe une probabilité risque-neutre Q telle que $C(K_i) = 1/\left(1 + r_f\right) E^Q[(A - K_i)^+]$ pour tout K_i

Exercice 1 : existence de probabilités risque-neutre en marchés incomplets

- Pour simplifier les notations, on pourra prendre le cas particulier où :
- $\{A_1^0, \dots, A_1^n\} \cup \{K_1 < \cdots < K_m\} = \{A_1^0 = 0, K_1 = 0, K_2 = 2, A_1^1 = 3, A_1^2 = 4, K_3 = 4, K_4 = 5, A_1^3 = 6\}$ et $r_f = 0$
- On étudiera ce que signifie la convexité et la décroissance de l'ensemble des points $\{(K_1, C(K_1)), (K_2, C(K_2)), (K_3, C(K_3)), (K_4, C(K_4))\}$
- Les formes possibles de la fonction $K \in \mathbb{R}^+ \to C(K)$
- L'ensemble des probabilités risque-neutre Q
- Enfin, on s'intéressera aux problèmes suivants :
- $\min_Q E^Q[(A_1 - K)^+]$ et $\max_Q E^Q[(A_1 - K)^+]$
  - *Indication : utiliser les résultats précédents, les approches géométriques et l'intuition financière*

Corrigé exercice 6, examen 5 mai 2014 : voir énoncé sur le site du cours

- $P(A_1 = 90) = 0{,}3, P(A_1 = 120) = 0{,}7, A_0 = 100, r_f = 0$
  - $C_H = 1_{\{A_1=120\}}$
    - Duplicating portfolio
    - $\begin{cases} \alpha \times 120 + \beta \times 100 = 1 \\ \alpha \times 90 + \beta \times 100 = 0 \end{cases}$
    - $\alpha = 1/30, \beta = -3/100$
    - Replicating price = $100/30 - 3 = 1/3$
  - $C_B = 1_{\{A_1=90\}}$
    - Duplicating portfolio
    - $\begin{cases} \alpha \times 120 + \beta \times 100 = 0 \\ \alpha \times 90 + \beta \times 100 = 1 \end{cases}$
    - Replicating price = $-100/30 + 4 = 2/3$

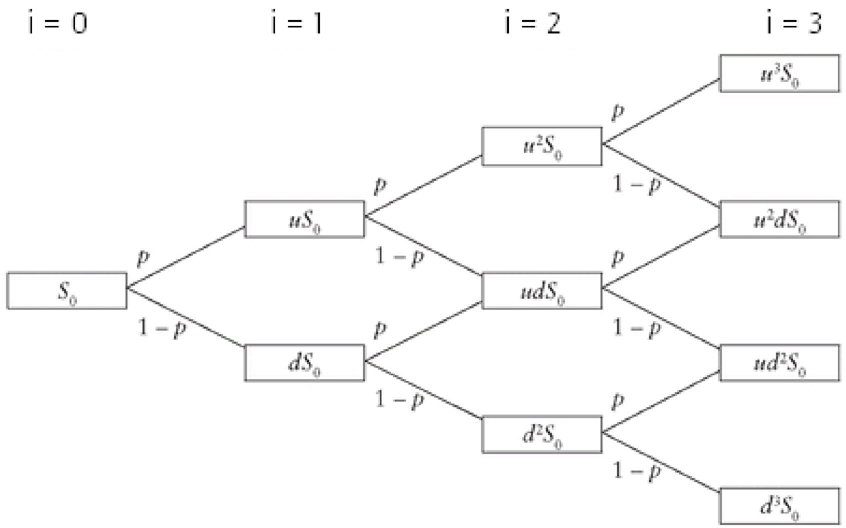
Corrigé partiel exercice 6, examen 5 mai 2014

- $P(A_1 = 90) = 0{,}3, P(A_1 = 120) = 0{,}7, A_0 = 90, r_f = 0$
  - $C_H = 1_{\{A_1=120\}}$
    - Duplicating portfolio
    - $\begin{cases} \alpha \times 120 + \beta \times 100 = 1 \\ \alpha \times 90 + \beta \times 100 = 0 \end{cases}$
    - $\alpha = 1/30, \beta = -3/100$
    - Replicating price = **90**$/30 - 3 =$ **0**
  - $C_B = 1_{\{A_1=90\}}$
    - Duplicating portfolio
    - $\begin{cases} \alpha \times 120 + \beta \times 100 = 0 \\ \alpha \times 90 + \beta \times 100 = 1 \end{cases}$
    - Replicating price = $-90/30 + 4 =$ **1**

Du statique au dynamique

- Exemple (modèle binomial): hausse ou baisse du prix d'un titre.
  - *deux états possibles à la date 1,* $\Omega_1 = \{H_1, B_1\}$
  - *Pour chaque état à la date 1, deux états possibles à la date 2.* $\Omega_2^H = \{H_2^H, B_2^H\}$, $\Omega_2^B = \{H_2^B, B_2^B\}$
  - $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2^H \cup \Omega_1 \times \Omega_2^B = \{H_1 H_2^H, H_1 B_2^H, B_1 H_2^B, B_1 B_2^B\}$
  - *Il y a donc quatre états de la nature correspondant à quatre trajectoires de prix*
- Il faudrait 4 actifs contingents aux trajectoires (path-dependent) pour dupliquer statiquement tout vecteur de paiements
- Avec la possibilité d'acheter et de vendre actif sous-jacent et actif sans risque à la date 1, il suffit de 2 actifs

Actifs contingents et approches dynamiques : modèle binomial de Cox, Ross et Rubinstein

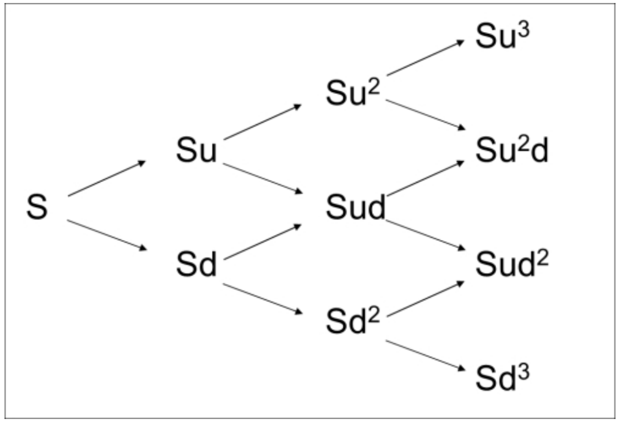


Prix d'options dans le modèle de Cox Ross et Rubinstein

- Evolution des prix d'un action.
- En partant d'un prix initial A_0, les prix peuvent être multipliés à chaque étape par $u > 1$ ou $d < 1$.
- On note r_f le taux sans risque entre deux périodes
- Au bout de $S \in \mathbb{N}$ étapes, il y a $S + 1$ valeurs possibles pour le prix à la date n, A_S : $A_0 d^S, A_0 u d^{S-1}, A_0 u^2 d^{S-2}, \dots, A_0 u^S$
- p probabilité de hausse, $q = 1 - p$ probabilité de baisse.
  - *Rappel : pour* $n = 0, \dots, S-1, A_n = \frac{1}{1+r_f} E^Q[A_{n+1} | A_n] = A_n \frac{pu + (1-p)d}{1+r_f} \Rightarrow \boldsymbol{p = \frac{1+r_f-d}{u-d}}$

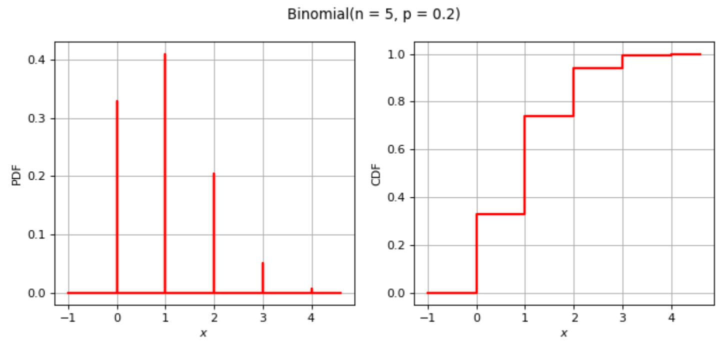
modèle de Cox Ross et Rubinstein

- Évolution des prix du sous-jacent dans un arbre binomial recombinant
- Dynamique « stationnaire »



Prix d'options dans le modèle de Cox Ross et Rubinstein

- Probabilité d'être dans l'état $s \in \{0, \dots, S\}$ à la date S
  - $\tilde{q}_s = \binom{S}{s} p^s q^{S-s}$, *où* $\binom{S}{s} = \frac{S!}{(S-s)! \times s!}$
    - Le nombre de hausses du prix de l'actif sous-jacent suit une loi binomiale : https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_distribution
  - *Ci-dessous à gauche probabilités $\tilde{q}_s$ pour $S = 5$, $p = 0{,}2$, à droite, le graphe de la fonction de répartition de la loi binomiale*



Prix d'options dans le modèle de Cox Ross et Rubinstein

- Loi de probabilité de l'actif
  - $K \in \mathbb{R} \to F(K) = Q(A_S \leq K)$
  - *F : fonction de répartition,*
    - Caractérise la loi de probabilité de A_S
  - $K \to Q(A_S > K) = S(K) = 1 - F(K)$ *: fonction de survie*
    - Pour les lois de probabilités discrètes, la fonction de survie S et la fonction de répartition F sont constantes par morceaux
  - $A_S > K \Leftrightarrow A_0 u^s d^{S-s} > K \Leftrightarrow s > \frac{\ln(K/(A_0 d^S))}{\ln(u/d)}$
    - Notons $s(K) = \left[\frac{\ln(K/(A_0 d^S))}{\ln(u/d)}\right]$
    - $[x]$: partie entière de x (plus grand entier $\leq x$)
  - $Q(A_S > K) = \sum_{s=s(K)}^{S} \tilde{q}_s$

Prix d'options dans le modèle de Cox Ross et Rubinstein

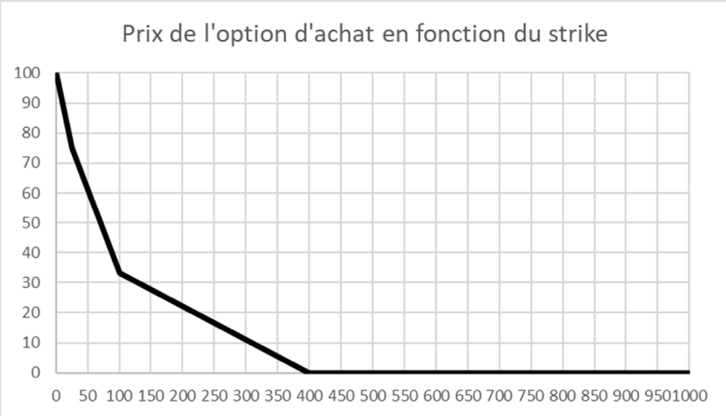
- Paiement à la date d'exercice S d'un call digital de strike K
  - *Paiement de 1 si $A_S > K$, paiement de 0 si $A_S \leq K$*
  - *Soit un paiement égal à $1_{A_S > K}$*
- Le prix (à la date 0) de l'option digitale est
  - $C_b(K) = 1/(1 + r_f)^S E^Q[1_{A_S > K}] = 1/(1 + r_f)^S Q(A_S > K)$
- Call (option d'achat) de strike K
  - *Paiement de $A_S - K$ si $A_S > K$, paiement de 0 si $A_S \leq K$*
  - *Soit un paiement égal à $(A_S - K)^+ = \max(A_S - K, 0)$*
- $K \in \mathbb{R}^+ \to C(K)$ où $C(K)$ est la prime du call de strike K
  - *On va calculer $C(K)$ en partant de $C(0) = A_0$ et des pentes de $K \to C(K)$*

Prix d'options dans le modèle de Cox Ross et Rubinstein

- Quand $C(.)$ est dérivable : $C'(K) = 1/(1 + r_f)^S Q(A_S > K)$
- $K \to Q(A_S > K)$constante par morceaux
  - $s = 0,1, \dots, S$
  - Pour $K = A_0 u^s d^{S-s}$, saut de $\tilde{q}_s = Q(A_S = K) = Q(A_S \geq K) - Q(A_S > K)$
  - Loi de probabilité discrète
  - *$K \to C(K)$ linéaire par morceaux*
    - $C(0) = A_0$
    - $K \in]0, A_0 d^S[$, pente de $K \to C(K)$ égale à $-\frac{1}{(1+r_f)^S}$
    - $K \in]A_0 d^S, A_0 u d^{S-1}[$, pente de $\frac{-1+\tilde{q}_0}{(1+r_f)^S}$
    - $K \in]A_0 u^s d^{S-s}, A_0 u^{s+1} d^{S-s-1}[$, pente de $\frac{-1+\tilde{q}_0+\cdots+\tilde{q}_s}{(1+r_f)^S}$

Prix d'options dans le modèle de Cox Ross et Rubinstein

- Illustration graphique : $K \in \mathbb{R}^+ \to C(K)$ pour un modèle où le sous-jacent prend des valeurs discrètes
  - *On remarque la décroissance et le caractère convexe*

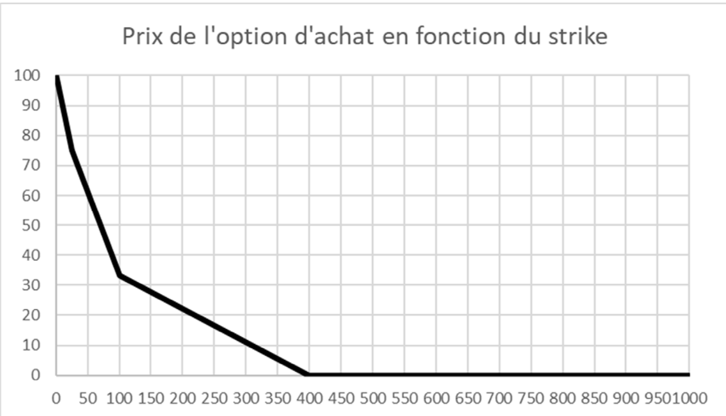


Prix d'options dans le modèle de Cox Ross et Rubinstein

- Exemple : $S = 2$.Valeurs possibles pour le sous-jacent $A_0 d^2, A_0 ud, A_0 u^2$
- Choisissons $r_f = 0$, $A_0 = 100$, $u = 2, d = 0{,}5$
- D'où $p = 1/3$, $q = 2/3$
- $\tilde{q}_0 = 4/9$, $\tilde{q}_1 = 4/9$, $\tilde{q}_2 = 1/9$
- $A_0 d^2 = 25$, $A_0 ud = 100$, $A_0 u^2 = 400$
- $C(0) = 100$, $C(25) = 75$, $C(100) = 33{,}3$, $C(400) = 0$
- On obtient le graphe de la fonction $K \in \mathbb{R}^+ \to C(K)$ par interpolation linéaire entre les 4 points $\big(0, C(0)\big)$, $\big(25, C(25)\big)$, $\big(100, C(100)\big)$, $\big(400, C(400)\big)$

Prix d'options dans le modèle de Cox Ross et Rubinstein

- Illustration graphique : $K \in \mathbb{R}^+ \to C(K)$ pour un modèle où le sous-jacent prend des valeurs discrètes
  - *On remarque la décroissance et le caractère convexe*

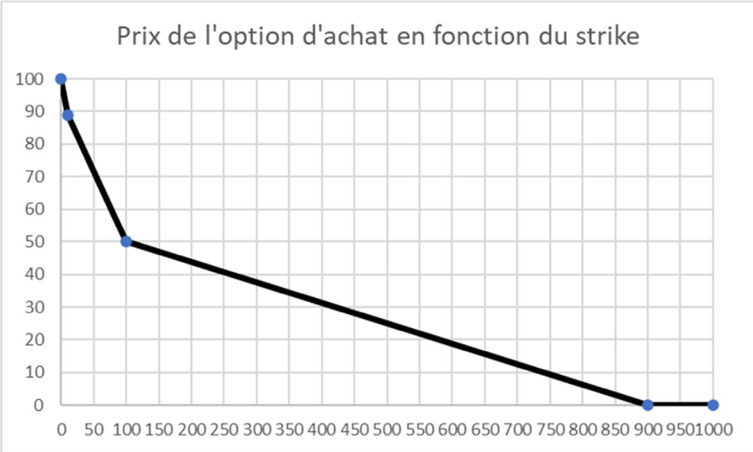


Prix d'options dans le modèle de Cox Ross et Rubinstein

- Exemple : $S = 2$, $r_f = 0$, $A_0 = 100$, $u = 3$, $d = \frac{1}{3}$
- $p = 1/4$, $q = 3/4$
- $\tilde{q}_0 = 9/16$, $\tilde{q}_1 = 6/16 = 3/8$, $\tilde{q}_2 = 1/16$
- $A_0 d^2 = \frac{100}{9} \approx 11{,}1$, $A_0 ud = 100$, $A_0 u^2 = 900$
- $C(0) = 100$, $C(11.1) = 88{,}9$, $C(100) = 50$, $C(900) = 0$
- On obtient le graphe de la fonction $K \in \mathbb{R}^+ \to C(K)$ par interpolation linéaire entre les 4 points $\big(0, C(0)\big)$, $\big(11.1, C(11.1)\big)$, $\big(100, C(100)\big)$, $\big(900, C(900)\big)$

Prix d'options dans le modèle de Cox Ross et Rubinstein

- $K \in \mathbb{R}^{+} \rightarrow C(K)$



Prix d'options dans le modèle de Cox Ross et Rubinstein

- Les prix des calls augmentent avec la volatilité.