

Double Impact: Credit Risk Assessment and Collateral Value

ALI CHABAANE, JEAN-PAUL LAURENT, JULIEN SALOMON

Janvier 2004

Séminaire Lyon-Lausanne

Objet de l'article

- Impact de la dépendance entre occurrence des défauts et gravité des défauts
- Sur les pertes de portefeuille de crédit
- Modèle standard (Bâle II) : pas de dépendance
- Modèle proposé : étend le modèle du comité de Bâle
- Statique, copule gaussienne
- Pour des portefeuilles homogènes (échangeabilité, de Finetti)
- Modèle à deux facteurs, distributions asymptotiques
- Aggravation de la charge moyenne du risque
- Epaissement des queues

Risque de non remboursement des prêts

- Contexte économique : marchandisation et globalisation
- Accumulation de risques : banques, compagnies d'assurances, hedge funds

© Original Artist

Reproduction rights obtainable from
www.CartoonStock.com



Réglementation du risque de crédit (à venir) : Bâle II

- Approche IRB (Internal Ratings Based)
- Modélisation des pertes de portefeuilles homogènes de crédit
- A un horizon donné.
- $j = 1, \dots, n$ crédits
- Nominal = 1
- D_j , indicatrice de défaut. $D_j = 1$ et 0 sinon (occurrence des sinistres)
- $P(D_j = 1) = PD$ probabilité de défaut
- LGD_j : perte en cas de défaut (montant du sinistre)
- Perte agrégée $L = \sum_j D_j \times LGD_j$ (modèle individuel)

Réglementation du risque de crédit (à venir) : Bâle II

- Pas de prise en compte des pertes latentes liées à l'évolution de la qualité des crédits (« *credit migration* »).
- Modélisation des D_j : $D_j = 1_{\{\Psi_j < z\}}$
- (Ψ_1, \dots, Ψ_j) vecteur Gaussien latent, avec corrélation ρ (symétrie)
- $\Psi_j \equiv \sqrt{\rho}\Psi + \sqrt{1-\rho} \bar{\Psi}_j$, avec Ψ et $(\bar{\Psi}_j)_{1 \leq j \leq n}$ indépendants
- Représentation factorielle : Ψ risque commun, $(\bar{\Psi}_j)_{1 \leq j \leq n}$ risques spécifiques
- Modèle Probit multivarié, copule Gaussienne
- D_j dépendants : Denuit et al [2002], Genest et al [2003]

Modélisation des pertes en cas de défaut : LGD_j

- $LGD_j = \left[1 - e^{\mu + \sigma \xi_j} \right]^+$
- Modèle de type Merton, actif log-normal
- σ volatilité de l'actif, μ prend en compte rentabilité moyenne et levier
- ξ_j : risque sur l'actif (loi normale)
- $L_j = \left[1 - e^{\mu + \sigma \xi_j} \right]^+ \times 1_{\{\Psi_j < \Phi^{-1}(PD)\}}$ perte sur le crédit j .
- Bâle II : occurrence D_j et montant des sinistres indépendants LGD_j
- Corrélacion entre Ψ_j et $\xi_j = 0$
- Non compatible avec observations empiriques : Altman et Kishore [1996]
- En récession, plus de défauts et défauts plus graves : corrélation > 0

Modélisation des pertes en cas de défaut : LGD_j

- Modèle structurel de défaut / théorie de la ruine
- Défaut si la valeur des actifs < seuil
- Perte fonction du dépassement du seuil
- \Rightarrow dépendance très (trop) forte entre D_j et LGD_j :
- Défauts non liés à la valeur des actifs (liquidité), valeur de liquidation de l'entreprise > valeur de la dette
- Le modèle proposé permet de contrôler le degré de dépendance entre occurrence des défauts et gravité des défauts.

Modélisation d'un portefeuille de crédits

- Cohérence avec Bâle II pour les indicatrices de défaut $D_j = 1_{\{\Psi_j < z\}}$
 - Pertes en cas de défaut : $LGD_j = \left[1 - e^{\mu + \sigma \xi_j}\right]^+$
 - Il faut spécifier les corrélations entre les variables latentes Ψ_j et ξ_i ,
 - ... Et entre les variables latentes ξ_i
 - ξ_i corrélés \Leftrightarrow montants des sinistres corrélés : Müller et Plug [2001]
 - Portefeuilles homogènes : Ψ_j échangeables, ξ_i échangeables
 - De Finetti, Bâle II, double représentation à un facteur
- $$\begin{cases} \Psi_i = \sqrt{\rho} \Psi + \sqrt{1-\rho} \bar{\Psi}_i \\ \xi_i = \sqrt{\beta} \xi + \sqrt{1-\beta} \bar{\xi}_i \end{cases} \quad \rho, \beta \in [0,1], \xi, \bar{\xi}_i \text{ indépendants}$$

- Mais homogénéité des crédits
- \Rightarrow corrélation entre Ψ_j et $\xi_i, i \neq j$ ne dépend pas de i, j
- \Rightarrow plus de structure sur les corrélations :
- $(\bar{\Psi}_i, \bar{\xi}_i)$ indépendant de (Ψ, ξ)
- $(\bar{\Psi}_i, \bar{\xi}_i)$ indépendants entre eux et notamment $\text{corr}(\bar{\Psi}_i, \bar{\xi}_j) = 0, i \neq j$
- mais $\text{corr}(\bar{\Psi}_i, \bar{\xi}_i) \neq 0$
- $(\bar{\Psi}_i, \bar{\xi}_i)$: « bons » résidus
- $\begin{cases} \Psi_i = \sqrt{\rho}\Psi + \sqrt{1-\rho} \bar{\Psi}_i \\ \xi_i = \sqrt{\beta}\xi + \sqrt{1-\beta} \bar{\xi}_i \end{cases}$ modèle à deux facteurs, quatre paramètres
- $\text{corr}(\Psi, \xi), \text{corr}(\bar{\Psi}_i, \bar{\xi}_i)$: corrélations croisées occurrence/montant sinistres

Lois des pertes sur des portefeuilles de crédit

- Approche asymptotique (idem assurance, Arbitrage Pricing Theory)
- Nombre de crédits : $n \rightarrow \infty$, nominal total = 1

- Perte agrégée pour n crédits : $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n LGD_j \times 1_{\{\Psi_j < \Phi^{-1}[PD]\}}$

- Résultat asymptotique (portefeuilles « infiniment granulaires ») :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n LGD_j \times 1_{\{\Psi_j < \Phi^{-1}[PD]\}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} L_{\Psi, \xi} = E \left[LGD_j \times 1_{\{\Psi_j < \Phi^{-1}[PD]\}} \mid \Psi, \xi \right]$$

- Limite non dégénérée à cause de la dépendance :
- Loi des grands nombres « conditionnelle » : espérance perte | facteurs
- Ne dépend que du risque factoriel (Ψ, ξ) (risques spécifiques éliminés)
- Espérance conditionnelle facile à calculer : distribution gaussienne bivariée

Analyse du risque de portefeuilles homogènes infiniment granulaires

- L : perte agrégée $L = E \left[LGD_j \times 1_{\{\Psi_j < \Phi^{-1}[PD]\}} \mid \Psi, \xi \right]$

- Perte moyenne : $E^P [L]$

$$E^P [L] = \Phi_2 \left[\Phi^{-1}(PD); -\frac{\mu}{\sigma}; K \right] - e^{\mu + \sigma^2/2} \times \Phi_2 \left[\Phi^{-1}(PD) - \sigma K; -\frac{\mu}{\sigma} - \sigma; K \right]$$

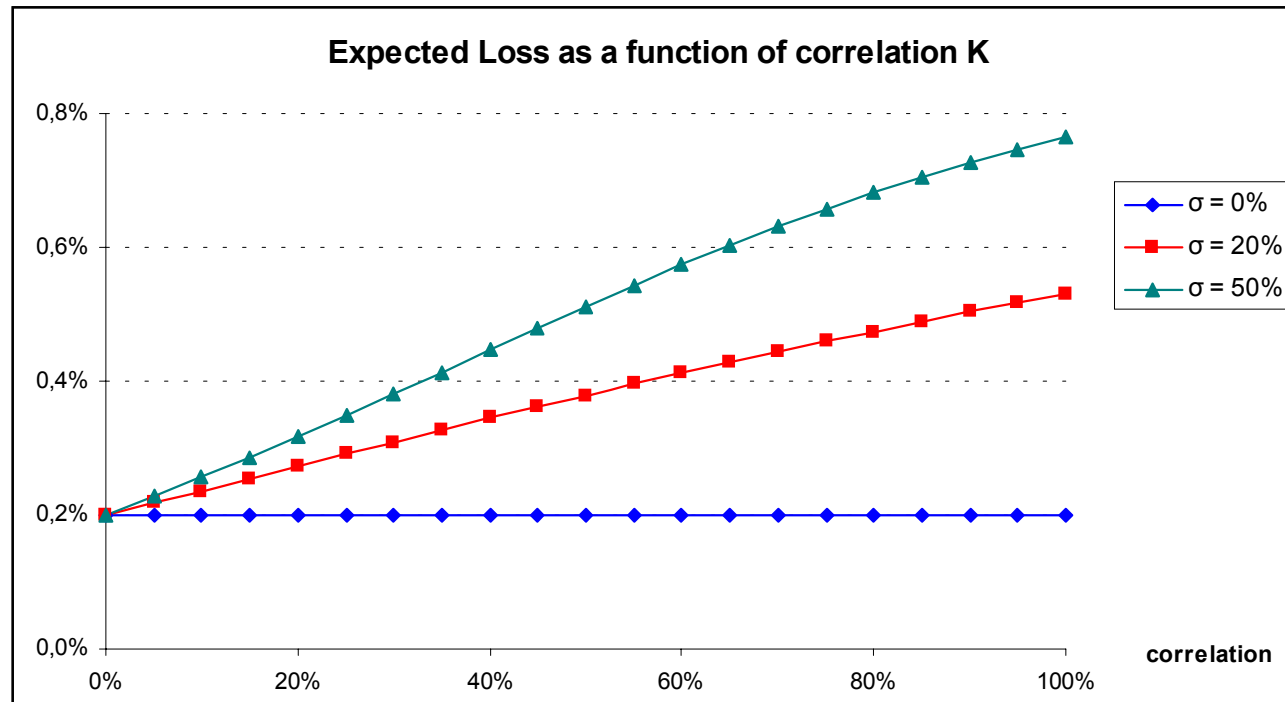
- Value at Risk : $VaR_\alpha(L) = \inf (t, P[L \leq t] \geq \alpha)$

- Expected Shortfall : $ES_\alpha(L) = E^P [L \mid L > VaR_\alpha(L)]$ (distribution continue)

- VaR et ES calculés par simulation

Perte moyenne sur un portefeuille de crédits

- perte moyenne ↗ avec dépendance entre occurrence et gravité des défauts
- ⇒ augmentation des marges de crédit
- K corrélation entre Ψ_i et ξ_i , σ volatilité de l'actif



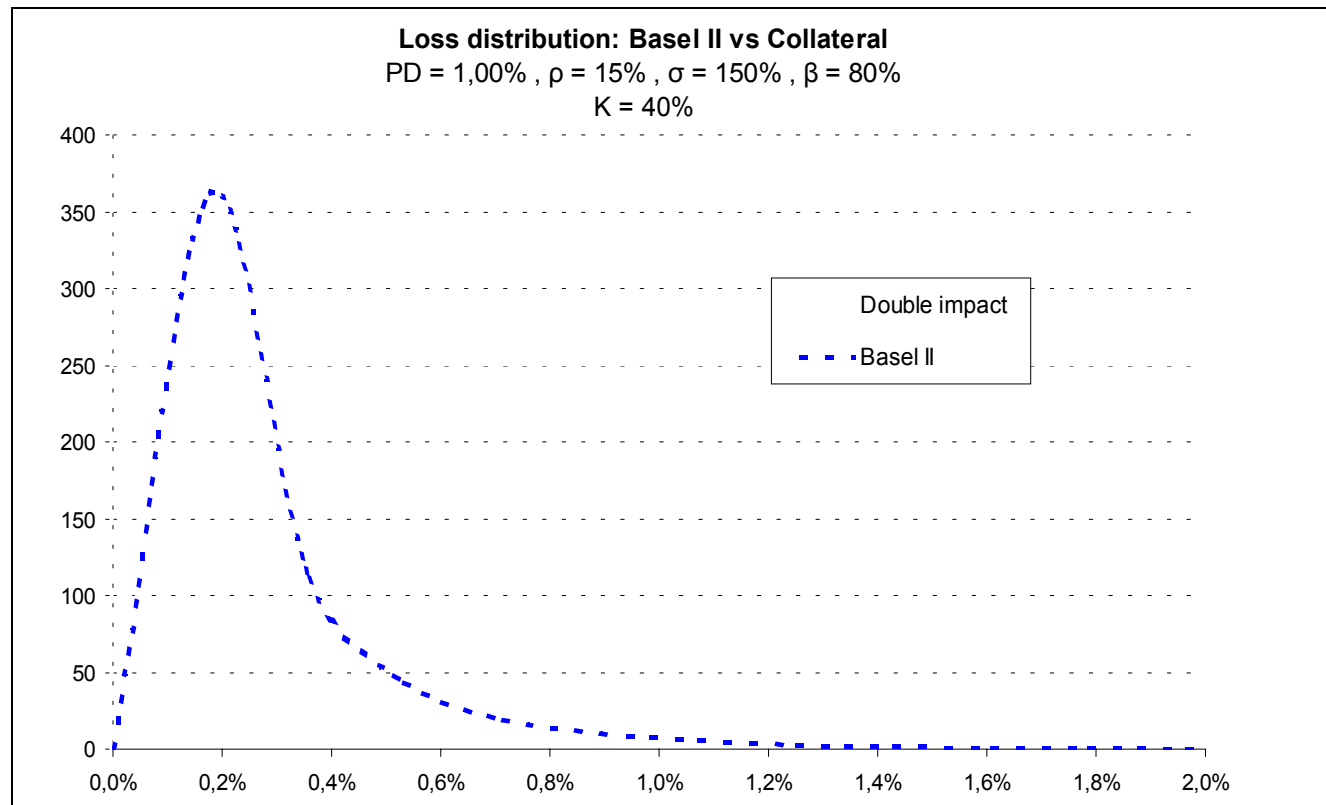
VaR et Expected Shortfall

- corrélation entre risques spécifiques = 0, corrélation entre les deux facteurs η , corrélation entre les pertes sachant défaut β

$\beta \backslash \eta$	0%	20%	40%	60%	80%	100%
0%	100,0%	113,1%	122,1%	130,3%	139,1%	145,7%
	<i>100,0%</i>	<i>115,6%</i>	<i>126,0%</i>	<i>135,7%</i>	<i>144,8%</i>	<i>151,5%</i>
20%	100,7%	129,9%	143,7%	157,7%	165,4%	175,4%
	<i>100,8%</i>	<i>134,1%</i>	<i>148,5%</i>	<i>163,2%</i>	<i>172,6%</i>	<i>182,7%</i>
40%	100,8%	144,3%	165,6%	181,0%	193,3%	204,1%
	<i>100,8%</i>	<i>149,0%</i>	<i>171,2%</i>	<i>190,2%</i>	<i>201,8%</i>	<i>215,3%</i>
60%	99,8%	161,2%	186,3%	204,4%	219,8%	232,1%
	<i>100,0%</i>	<i>168,6%</i>	<i>194,3%</i>	<i>215,7%</i>	<i>230,6%</i>	<i>244,0%</i>
80%	100,2%	179,5%	209,0%	227,8%	247,2%	261,0%
	<i>100,4%</i>	<i>188,7%</i>	<i>219,5%</i>	<i>236,9%</i>	<i>258,7%</i>	<i>274,8%</i>
100%	100,4%	192,6%	225,6%	251,1%	272,9%	281,9%
	<i>99,7%</i>	<i>201,2%</i>	<i>235,4%</i>	<i>261,8%</i>	<i>287,9%</i>	<i>296,9%</i>

$\overline{\text{VaR}}$ et $\overline{\text{ES}}$ (*italique*) ($\gamma = 0\%$) en fonction des corrélations
1 000 000 simulations

Loi des pertes agrégées



**Densité des pertes : comparaison entre Bâle II et le modèle étendu
(200,000 simulations)**

- moins de poids au centre, plus sur les queues

Conclusion

- Prise en compte de la dépendance entre, occurrence des sinistres, montant des sinistres et occurrence des sinistres/montant des sinistres
- De Finetti \Rightarrow structure très simple du modèle à variables latentes
- Deux facteurs
- Expression simple de la perte agrégée pour un portefeuille homogène « infiniment granulaire »
- \nearrow du coût moyen du risque de crédit \Rightarrow tarification
- \nearrow des mesures de risque (épaississement des queues) \Rightarrow politique prudentielle
- Moins de poids au milieu de la distribution : « *smile* » de corrélation sur les CDO